

Rafał Oldziejewski

I rok, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Pod opieką dr hab. Marii Ekiel- Jeżewskiej, prof. IPPT PAN

W zakładzie Mechaniki i Fizyki Płynów IPPT PAN

Wyznaczanie gęstości i współczynnika lepkości dynamicznej dla miodu i gliceryny

25.05.2011

Streszczenie

W doświadczeniu zmierzono gęstość miodu i gliceryny, które wynoszą odpowiednio:

$$\rho_m = (1392 \pm 69) \frac{kg}{m^3} \qquad \rho_g = (1212 \pm 63) \frac{kg}{m^3}$$

Następnie badano opadanie metalowej kulki w danym płynie, co pozwoliło wyznaczyć wartości lepkości dynamicznej miodu i gliceryny:

$$\eta_m = (7,14 \pm 0,62) Pa \cdot s \qquad \eta_g = (3,85 \pm 0,33) * 10^{-1} Pa \cdot s$$

Otrzymane wyniki zgadzają się z wartościami tablicowymi, aczkolwiek, w przypadku wyznaczania lepkości dynamicznej gliceryny, założony model teoretyczny wydają się być nie w pełni poprawny.

I. Podstawy teoretyczne

Lepkość dynamiczna jest jedną z najważniejszych cech płynów. Definiuje się ją jako siłę tarcia pomiędzy warstwami płynu, poruszającymi się równoległe względem siebie z różnymi co do wartości prędkościami. Warstwa poruszająca się szybciej działa przyspieszająco na warstwę poruszającą się wolniej i odwrotnie.

Rozpatrzmy opadanie metalowej kulki w płynie. Na samym początku ruchu kulka przyspiesza aż do pewnej prędkości, przy której ustala się równowaga sił na nią działających. Zgodnie z I prawem dynamiki Newtona siła ciężkości wzdłuż kierunku ruchu jest równoważona przez siły wyporu i lepkości działające przeciwko ruchowi kulki w płynie. Daną zależność wyraża następujące równanie:

$$Q = F_w + F_s \quad (1)$$

gdzie: Q – siła ciężkości, F_w – siła wyporu hydrostatycznego, F_s – siła lepkości.

Do wyznaczania sił lepkości można skorzystać z prawa Stokesa (założenie stałej prędkości-równowagi sił oraz przepływu nieturbulentnego), którą dla kulki określamy jako:

$$F_s = 6\pi\eta r v \quad (2)$$

gdzie: η – współczynnik lepkości, r – promień kulki, v – prędkość kulki

Współczynnik lepkości η jest to wielkość charakterystyczna dla danej cieczy, od której zależy wartość siły lepkości. Dany wzór jest słuszny dla nieskończonej objętości płynu, w której porusza się kulka. W doświadczeniu posługiwano się skończonym cylindrem, a więc należy wziąć pod uwagę poprawkę związaną z wystąpieniem efektów brzegowych. Korzystamy z zależności [1]:

$$F_s = 6\pi\eta r v \left(1 + 2,1044 \frac{r}{R}\right) \quad (3)$$

gdzie R – promień cylindra

Pozostałe dwie siły z równania (1) są powszechnie znane. Po przekształceniu równania (1) otrzymujemy interesującą nas zależność:

$$\eta = \frac{g(m - V_k \rho_p)}{6\pi v r \left(1 + 2,1044 \frac{r}{R}\right)} \quad (4)$$

gdzie: ρ_p – gęstość płynu, V_k – objętość kulki, m – masa kulki, g – przyspieszenie ziemskie. Jednostką współczynnika lepkości η jest $[Pa \cdot s]$.

Zależność na gęstość płynu opisuje równanie:

$$\rho_p = \frac{m_p}{V_p} \quad \frac{kg}{m^3} \quad (5)$$

gdzie: m_p – masa płynu, V_p – objętość płynu

W przypadku ruchu ciała w płynie ważną rolę odgrywa liczba Reynoldsa, która określa nam zakres stosowalności prawa Stokesa, wyrażona równaniem:

$$Re = \frac{v \cdot \rho_p \cdot l}{\eta} \quad (6)$$

gdzie: l - charakterystyczny dla danego przepływu wymiar liniowy(w przypadku kuli $l=2r$)

Jeśli spełniona jest nierówność $Re \ll 1$, wtedy można korzystać z prawa Stokesa.

II. Układ pomiarowy

Do wyznaczenia gęstości miodu i gliceryny wykorzystano cylinder miarowy, za pomocą którego mierzono objętość płynu w cylindrze, a także wagę elektroniczną, którą ważono cylinder(wcześniej waga była wytarowana ze względu na masę cylindra) z płynem. Znając te dwie wartości wylicza się gęstość płynu na podstawie równania (5).

Przy pomiarze lepkości również korzystano z cylindra miarowego wypełnionego cieczą. Metodą doświadczalną ustalono od jakiej odległości od lustra cieczy należy rozpocząć pomiar czasu(za pomocą stopera) opadania kulki by ruch kulki był jednostajny aż do wybranego poziomu dolnego(odległego od dna cylindra, by zminimalizować efekty brzegowe). Długość toru(odpowiednio: S_1 dla miodu i S_3 dla gliceryny) i średnicę cylindra(D) zmierzono za pomocą taśmy mierniczej. W przypadku pomiarów dla miodu mierzono dodatkowo czas w jakim kulka pokonuje połowę długości toru(S_2), aby upewnić się, że kulka podczas trwania pomiaru poruszała się ruchem jednostajnym. Następnie za pomocą wzoru $v = \frac{S}{t}$ wyznacza się prędkość opadania kulki. Po jej obliczeniu, korzystając z równania (4) wyznacza się lepkość płynu. Na koniec sprawdza się liczbę Reynoldsa(równanie (6)) dla płynu, by potwierdzić zasadność stosowania prawa Stokesa dla danego przepływu.

III. Wyniki pomiarów

1. Pomiar masy kulki, promienia kulki, promienia średnicy cylindra

Na wadze elektronicznej zważono 20 kulek. Otrzymano:

$$m_{20} = (2,20 \pm 0,01) \text{ g}$$

$$m = \frac{m_{20}}{20} = (0,1100 \pm 0,0005) \text{ g} = (1,100 \pm 0,005) \cdot 10^{-4} \text{ kg}$$

Jak widać błąd pomiaru masy pojedynczej kulki jest zaniedbywalny(różnica 3 rzędów wielkości), a zatem: $m = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$

Następnie suwmiarką wykonano pomiar średnicy 20 kulek(wcześniej ważonych). Za każdym razem otrzymano ten sam wynik. Promień kulki wynosi zatem:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{2,99\text{mm}}{2} = 1,495\text{mm} = 1,495 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

W wyniku pomiaru otrzymano średnicę cylindra:

$$R = \frac{D}{2} = (2,39 \pm 0,02)\text{cm} = (0,0239 \pm 0,002) \text{ m}$$

2. Wyznaczanie prędkości opadania kulki

W tym etapie doświadczenia mierzono czas opadania kulki na odpowiednio dobranej długości toru ruchu, na którym kulka porusza się ze stałą prędkością.

Wyniki pomiarów z obliczeniami:

Miód				Gliceryna			
		$S_1=(10,6\pm 0,3)\text{cm}$	$S_2=(21,4\pm 0,3)\text{cm}$			$S_3=(21,4\pm 0,3)\text{cm}$	
pomiar czasu (t_{sr})	n	t_1 [s]	t_2 [s]	pomiar czasu (t_{sr})	n	t_1 [s]	
	1.	27,17	54,00		1.	2,86	
	2.	27,33	54,36		2.	2,92	
	3.	27,28	54,15		3.	2,88	
	4.	27,57	54,71		4.	3,00	
	5.	27,42	54,66		5.	2,93	
	6.	27,63	55,01		6.	2,89	
	7.	27,41	54,52		7.	2,85	
	8.	26,98	53,95		8.	2,87	
	9.	27,72	54,84		9.	2,90	
	10.	27,77	55,35		10.	2,92	
	11.	26,94	54,01		11.	2,99	
	12.	27,38	54,54		12.	2,99	
	13.	27,63	54,87		13.	2,80	
	14.	27,16	54,41		14.	2,84	
	15.	27,69	55,35		15.	2,88	
	16.	27,64	54,85		16.	2,87	
	17.	27,68	54,88		17.	2,82	
	18.	27,77	55,22		18.	2,76	
	19.	27,36	54,35		19.	2,82	
20.	27,58	54,72	20.	2,90			

n- numer pomiaru, S_2, S_3 - długość toru opadania kulki, S_1 - długość połowy toru opadania kulki, błędy wielkości S_1, S_2, S_3 wynikają z niedokładności taśmy mierniczej i oka ludzkiego;

Za pomocą programu SciDAVis obliczono poszczególne czasy średnie wraz z odchyleniami standardowymi od wyników. Otrzymano:

$$t_{sr1} = (27,46 \pm 0,25) \text{ s}$$

$$t_{sr2} = (54,64 \pm 0,43) \text{ s}$$

$$t_{sr3} = (2,88 \pm 0,06) \text{ s}$$

Znając drogę, a także czas opadania kulki dla poszczególnych płynów można wyznaczyć jej prędkość. Następnie na podstawie różniczki zupełnej wyznaczono niepewność pomiaru prędkości. Dla miodu:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_{\text{sr}1}} = \frac{0,106}{27,46} = (3,86 \pm 0,12) \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{s_2}{t_{\text{sr}2}} = \frac{0,214}{54,64} = (3,92 \pm 0,07) \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

Jak widać prędkości te przy uwzględnieniu niepewności pomiarowych możemy uznać za takie same, a więc dobrze dobrano tor ruchu kulki. Na podstawie powyższego wniosku wyliczono średnią prędkość i odchylenie standardowe na podstawie powszechnie znanych wzorów na średnią ważoną. Ostatecznie:

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = (3,90 \pm 0,11) \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

Dla gliceryny:

$$v_g = v_3 = \frac{s_3}{t_{\text{sr}3}} = \frac{0,214}{2,88} = (7,43 \pm 0,19) \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$$

3. Wyznaczanie gęstości miodu i gliceryny

Ważono te same objętości ($V_p = (25 \pm 1)ml$) miodu i gliceryny. Otrzymano:

$$m_m = (34,8 \pm 1,0)g$$

$$m_g = (30,1 \pm 1,0)g$$

Błędy tych wielkości wynikają z niedokładności przyrządów i niedokładności obserwacji przez oko ludzkie. Korzystając z (5) i obliczając błąd z różniczki zupełnej wyznaczono gęstości miodu i gliceryny, które wynoszą odpowiednio:

$$\rho_m = (1392 \pm 69) \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_g = (1212 \pm 63) \frac{kg}{m^3}$$

4. Obliczanie współczynnika lepkości dynamicznej miodu i gliceryny

Na podstawie danych doświadczalnych, a także wyników powyższych obliczeń, można wyznaczyć współczynniki lepkości dynamicznej miodu i gliceryny. Korzystając z (4) i wyliczając błąd z różniczki zupełnej otrzymano kolejno:

$$\eta_m = (7,14 \pm 0,54)Pa \cdot s$$

$$\eta_m = (3,85 \pm 0,29) * 10^{-1} Pa \cdot s$$

Na koniec warto sprawdzić jak ważny jest wpływ poprawki do prawa Stokesa wykorzystany w równaniu (4). W równaniu (3) współczynnik poprawkowy równy jest jedności (oznacza to brak poprawki) zaś w równaniu (4) poprawka (p) wyraża się wzorem:

$$p = (1 + 2,1044 \frac{r}{R})$$

gdzie r- promień kulki, R- promień cylindra;

Po wstawieniu wartości liczbowych do powyższego równania otrzymujemy:

$$p = 1,13$$

Natychmiast znajdujemy, że wpływ(w) ścianki bocznej na wartość siły lepkości dla naszego układu pomiarowego wynosi:

$$w = (p - 1) * 100\% = 13\%$$

Jak widzimy jest to dość istotny przyczynek do wartości siły lepkości, a więc wzięcie go pod uwagę było słuszne.

5. Sprawdzenie liczby Reynoldsa dla przepływu kulki w miodzie i glicerynie:

Na podstawie równania (6) obliczono liczbę Reynoldsa dla obydwu płynów w celu sprawdzenia słuszności założonego modelu teoretycznego.

Dla miodu:

$$Re = 0,002$$

Dla gliceryny:

$$Re = 0,7$$

IV. Dyskusja wyników

Wyznaczone wartości gęstości oraz współczynnika lepkości porównano z wartościami tablicowymi([2],[3],[4]), pamiętając, że w trakcie pomiaru zmierzono temperatury obydwu cieczy, które były takie same i wynosiły $t = 25^{\circ}C$. Wpływ temperatury jest szczególnie ważny w przypadku badanie gliceryny. Dla miodu otrzymano pełną zgodność wyników z danymi tablicowymi([2], [4]), co wskazuje na poprawnie wykonane doświadczenie, a także na odpowiednio dobrany model teoretyczny opisujący zjawisko. Zasadność stosowania prawa Stokesa dla miodu

potwierdza obliczona liczba Reynoldsa, która w przypadku miodu jest aż o trzy rzędy wielkości mniejsza niż jedynka. Na pewno mamy tu do czynienia z przepływem, dla którego spełnione jest prawo Stokesa. Na podstawie [2] można powiedzieć, że badany miód należał do bardzo lepkich, zaś na podstawie [4], że był on umiarkowanie gęsty. W przypadku gliceryny interpretacja wyników nie jest już tak oczywista. Jej gęstość i lepkość zależą znacznie od jej stężenia procentowego w roztworze wodnym. Zarówno wyznaczona gęstość jak i lepkość badanej gliceryny są zgodne z danymi tablicowymi([3]), odpowiednio(po uwzględnieniu niepewności pomiarowych) w zakresie stężeń 59%- 100% i zakresie stężeń 94%- 96%. Jak widzimy oba zakresy nakładają się na siebie w przedziale 94%-96% i najprawdopodobniej z gliceryną o takim stężeniu miano do czynienia w trakcie doświadczenia. Powód do zastanowienia daje wartość liczby Reynoldsa obliczona dla gliceryny. Co prawda jest ona mniejsza od jedności, ale nie różni się od niej znacznie. Daje to powody do uznania, że w przypadku gliceryny, proponowany model teoretyczny nie do końca się sprawdza i należałoby go zmienić.

V. Dyskusja niepewności pomiarowych

Głównym źródłem niepewności pomiarowych były niedokładności przyrządów(np. nieprecyzyjnie wykonany cylinder miarowy, taśma miernicza, skończona wartość jaką każdy z przyrządów może zmierzyć) użytych w doświadczeniu. Dodatkowym czynnikiem generującym błędy pomiaru była niedokładność oka ludzkiego przy uruchamianiu i wyłączaniu stopera podczas opadania kulki. Szczególnie widoczne było to przy próbach z gliceryną, gdzie czas opadania był relatywnie krótki. Aby zminimalizować te efekty przeprowadzono 20 serii pomiarowych, co znacznie ograniczyło rolę błędów grubych. Kolejnym czynnikiem wpływającym na dokładność pomiarów był problem z każdorazowym spuszczeniem kulki środkiem cylindra. W trakcie pomiarów wielokrotnie obserwowano ruch kulki w pewnym oddaleniu od środka cylindra. Można również rozpatrywać oddziaływania kulki z górną powierzchnią płynu i dnem cylindra, które również mogły wpływać na niepewność pomiarową, ale wydaje się, że przy zastosowanym cylindrze(bardzo długi w porównaniu z rozmiarami kulki) można ten efekt zaniedbać. Wartości niepewności wielkości złożonych obliczałem za pomocą różniczki zupełnej.

VI. Bibliografia

[1] Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 56, No. 8, August, 1987, pp. 2713-2720

[2] <http://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity>

[3] <http://www.fizyka.umk.pl/~lab2/tables/viscosit.html>

[4] <http://almanach.ordugh.org/wiki/Miód>