Trajektorie dwóch cząstek punktowych opadających pod wpływem grawitacji w nieograniczonym lepkim płynie

Anna Myłyk, Maria L. Ekiel-Jeżewska
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
ul. Pawińskiego 8B, 02-106 Warszawa
(Dated: 26 stycznia 2011)

Celem pracy jest pokazanie jak zachowują się dwie identyczne cząstki punktowe opadające w lepkim płynie pod wpływem grawitacji. Do tego celu skorzystaliśmy z układu równań Stokesa opisującego ruch płynu lepkiego w którym siły bezwładności są zaniedbywalne w stosunku do sił lepkich.

Ruch płynu w układzie charakteryzującym się liczbą Reynoldsa dużo mniejszą od jedności, można opisać poprzez rozwiązanie równań Stokesa [1].

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} p + \eta \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} = 0, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie: p - ciśnienie płynu, η - lepkość dynamiczna płynu, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ - szukane pole prędkości płynu, $\boldsymbol{f}$ - siła zewnętrzna na jednostkę objętości płynu. Jeżeli $\boldsymbol{f}$ jest postaci $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}\delta(\boldsymbol{r})$, to równanie (1) zapisujemy jako:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} p(\boldsymbol{r}) + \eta \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{F}\delta(\boldsymbol{r}) = 0, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Równanie (2) ma następujące rozwiązanie [2]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{F}, \\ p(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{F} \end{cases} \tag{3}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}}{r^2}\right), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right), \tag{5}$$

są tensorami Greena dla równań Stokesa; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})$ nazywany jest tensorem Oseena.

Rozważmy dwie cząstki punktowe w położeniach $\boldsymbol{r}_\alpha$, gdzie $\alpha = 1, 2$, które wywieraja na płyn siły $\boldsymbol{F}_\alpha$. Wtedy prędkości tych dwóch cząstek są postaci:

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\cdot \boldsymbol{F}_2, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot \boldsymbol{F}_1, \tag{7}$$

Jeśli $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2$, to wówczas:

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2. \tag{8}$$

Aby uzasadnić (8) weźmy po uwagę równanie (4) skąd wynika, że $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{r})$.
Pokażemy teraz, że trajektorie $\boldsymbol{r}_1(t)$ oraz $\boldsymbol{r}_2(t)$ są liniami prostymi. Ponieważ prędkość cząstki α:

$$\boldsymbol{V}_\alpha = \frac{d\boldsymbol{r}_\alpha}{dt}, \tag{9}$$

gdzie $\alpha = 1, 2$, to z równania (8):

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{dt} = 0 \tag{10}$$

zatem

$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{const}(t) \tag{11}$$

czyli różnica położeń cząstek jest stała w czasie. Pociąga to za sobą

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{const}(t) \tag{12}$$

a więc z równań (6, 7, 9) wynika, że $d\boldsymbol{r}_\alpha/dt$ również jest wartością stałą w czasie. Stąd:

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{C}_\alpha, \tag{13}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{C}_\alpha$ są stałymi wektorami, przy czym $\boldsymbol{C}_\alpha$ są położeniami początkowymi cząstek. Współczynnik nachylenia prostych jest równy: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\cdot \boldsymbol{F}$. Jeśli dwie identyczne cząstki opadają pod wpływem grawitacji to każda z nich porusza się po lini prostej.

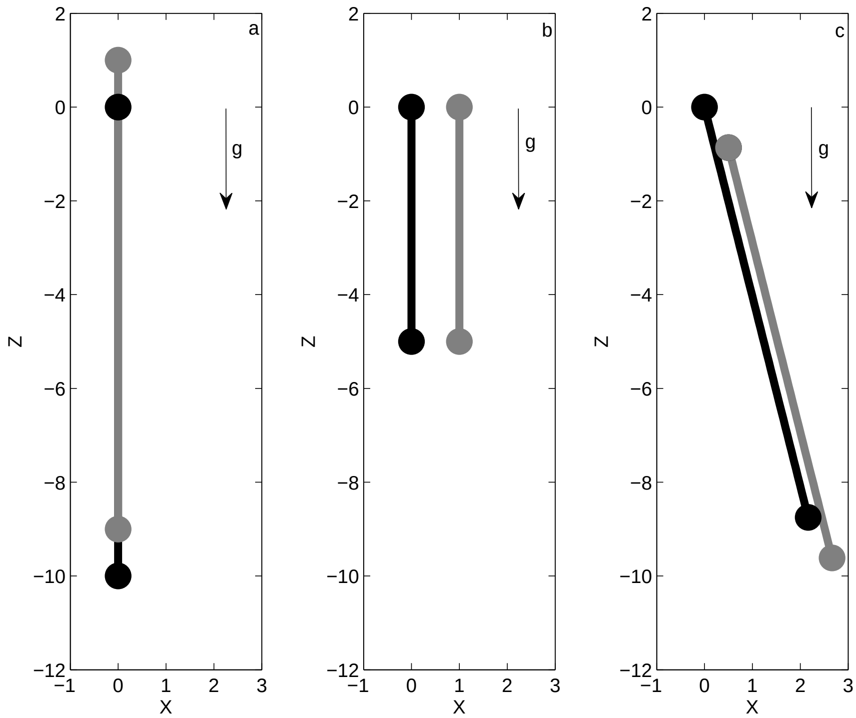
Na rysunkach poniżej pokazano przykładowe trajektorie dwóch cząstek punktowych dla różnych położeń początkowych korzystając z układu równań (13). Wybrano jednostki czasu i prędkości postaci:

$$\tau = \frac{8\pi\eta L^2}{F} \tag{14}$$

$$\upsilon = \frac{F}{8\pi\eta L} \tag{15}$$

gdzie: L - początkowa odległość między cząstkami. Dalej będziemy używać zmiennych bezwymiarowych $\boldsymbol{R}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha/L$, oraz $T = t/\tau$. Wybieramy układ współrzędnych tak, że płaszczyzna $Y = 0$ jest pionowa i zawiera obie cząstki, a dodatkowo siła $\boldsymbol{F} = (0, 0, -F)$.

Przykładowe trajektorie cząstek przedstawiono na Rys. 1. Ustalono, że początkowa odległość między cząstkami jest równa jeden, a zmieniano orientację pary cząstek.



Rysunek 1: Trajektorie dwóch identycznych cząstek punktowych opadających pod wpływem grawitacji w czasie $0 \leq T \leq 5$.

W zależności od konfiguracji początkowej, zauważono że:

a). Jeśli $X_1(0) = X_2(0)$, to trajektorie ich ruchów są linami pionowymi pokrywającymi się wzdłuż kierunku grawitacji (Rys.1a), oraz $\boldsymbol{A} = (0, 2)$.

b). Jeśli $Z_1(0) = Z_2(0)$, oraz $X_1(0) \neq X_2(0)$, to trajektorie są pionowe i równoległe do siebie (Rys.1b), przy czym $\boldsymbol{A} = (0, 1)$.

c). Jeśli $X_1(0) \neq X_2(0)$ i $Z_1(0) \neq Z_2(0)$, to trajektorie są do siebie równoległe lecz ustawione pod kątem do kierunku grawitacji (Rys.1c), przy czym $\boldsymbol{A} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Cząstki w konfiguracji a) poruszają sie najszybciej. Prędkość dla tej konfiguracji jest równa $V = |V_1| = |V_2| = 2$ w jednostkach określonych za pomocą równości (15). W przypadku cząstek konfiguracji b) mamy $V = 1$, natomiast w konfiguracji c) całkowita prędkość $V \cong 1.80$, a składowa wzdłuż grawitacji $V_z \cong -1.75$.

Dwie identyczne cząstki sferyczne także poruszają się po równoległych liniach prostych, co wynika z symetrii równań Stokesa względem $v \to -v$ oraz $p \to -p$.

---

[1] S. Kim and S.J. Karrila. Microhydrodynamics. Principles and Selected Applications. Dover Publications, Mineola, New York, 2005.
[2] L.D. Landau and E.M. Lifszyc. Hydrodynamika. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994.