„Równania Stokesa i ich podstawowe własności”

Hydrodynamika mikroświata
Karol Wędołowski

Streszczenie

Dla przepływów charakteryzujących się niską liczbą Reynoldsa ($Re < 1$) oryginalne równania rządzące ruchem płynu mogą zostać przybliżone przez równania Stokesa. W odróżnieniu od tych pierwszych, równania Stokesa są liniowe. Co więcej, charakteryzują się one pewnymi symetriami, z których najważniejszą jest symetria względem odwrócenia czasu. Obie wymienione własności równań Stokesa powodują, że ruch obiektów w mikroskali odbiega często od naszych makroskopowych intuicji. W pracy tej postaram się wyjaśnić czym jest przybliżenie Stokesa i czemu odwracalność w czasie równań Stokesa jest taka istotna.

1 Wstęp - równania Stokesa i liczba Reynoldsa

Ruch nieściśliwego, lepkiego płynu newtonowskiego opisywany jest przez równania Navier-Stokesa,

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \mu \triangle \vec{v} + \vec{F} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \, , \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\vec{v}(\vec{r}, t)$ oznacza prędkość płynu, ρ jego gęstość, p ciśnienie, μ lepkość dynamiczną, a $\vec{F}$ gęstość sił zewnętrznych działających na płyn.
Drugie równanie przedstawia nieściśliwość pola prędkości. Pierwsze opisuje dynamikę płynu zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona. Lewa strona równania opisuje bezwładność elementu płynu, natomiast prawa strona jest sumą sił działających na jednostkę jego objętości. W szczególności człon pierwszy jest siłą związaną z różnicą ciśnień, a drugi siłą wywołaną lepkością płynu.
Ważną częścią równania (1) jest nieliniowy człon inercyjny $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$, który powoduje, że rozwiązywanie równań ruchu dla płynu lepkiego jest takie skomplikowane. W związku z tym stosowane są uproszczenia oryginalnego układu równań. Jednym z nich jest przybliżenie Stokesa, będące tematem tej pracy.

Dla każdego rzeczywistego zagadnienia istnieją charakterystyczne skale takich wielkości jak prędkość czy długość. Dla przykładu przepływ w rurze posiada charakterystyczną długość będącą promieniem rury[1]. Za charakterystyczną prędkość można przyjąć prędkość maksymalną lub średnią. Na podstawie skal długości i prędkości możemy zbudować skalę czasu jako ich iloraz. Jest to skala związana z ruchem płynu. Istnieje jednak również inna skala czasu związana z lepkością. Lepkość kinematyczna $\nu = \mu/\rho$ jest współczynnikiem dyfuzji pędu i określa jak szybko zmiany prędkości są transportowane przez siły lepkie.

[1] Równie dobrze można przyjąć za skalę długości średnicę rury.

Możemy więc utworzyć z niej skalę opisującą czas potrzebny na przedyfundowanie zaburzenia prędkości na odległość charakterystyczną w danym problemie. Będzie ona równa,

$$\tau_\nu = \frac{L^2}{\nu} \ , \tag{2}$$

podczas gdy skala czasu związana z prędkością płynu wynosi,

$$\tau_U = \frac{L}{U} \ . \tag{3}$$

Iloraz tych skal czasowych jest pewną bezwymiarową liczbą nazywaną liczbą Reynoldsa,

$$Re = \frac{\tau_\nu}{\tau_U} = \frac{UL}{\nu} \ . \tag{4}$$

Mała liczba Reynoldsa ($Re < 1$) oznacza, że pęd jest przenoszony znacznie szybciej przez siły lepkie niż przez bezwładność. W przypadku przepływów o małych liczbach Reynoldsa to lepkość odgrywa dominującą rolę i nie popełnimy dużego błędu jeśli pominiemy w równaniu (1) człon inercyjny. W ten sposób otrzymujemy równania Stokesa, które dla przypadku stacjonarnego mają postać,

$$\begin{cases} \mu \triangle \vec{v} - \nabla p = -\vec{F} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \ . \end{cases} \tag{5}$$

Są to równania liniowe, więc ich rozwiązanie, dla dobrze postawionych warunków brzegowych, jest jednoznaczne. Co więcej, możemy stosować, dobrze znane z elektrodynamiki, metody rozwiązywania równań tego typu, np. metodę obrazów ([1]). Daje to znacznie większe możliwości analitycznej analizy przepływów o małej liczbie Reynoldsa.

Nie będziemy zajmować się przypadkiem niestacjonarnym, ponieważ zazwyczaj przy przepływach Stokesa, ze względu na bardzo efektywny transport pędu przez siły lepkie, można pominąć pochodną czasową, opisującą dochodzenie układu do stanu równowagi. Często rozwiązując problem zmienny w czasie, w każdej chwili zakładamy, że układ jest w stanie stacjonarnym. Innymi słowy zależność od czasu jest uwzględniana jedynie poprzez zmienne warunki brzegowe.

2 Podobieństwo przepływów

Zapiszmy równanie (1) w jednostkach bezwymiarowych. W tym celu każdą zmienną w równaniu przedstawimy jako iloczyn nowej bezwymiarowej zmiennej i wybranej przez nas jednostki. Jeżeli w rozważanym problemie wystepuje charakterystyczna długość L oraz prędkość U, to wszystkie wielkości fizyczne możemy przedstawić w nastepujący sposób,

$$\begin{cases} \vec{v} = U\vec{\tilde{v}} \\ \vec{r} = L\vec{\tilde{r}} \\ t = \frac{L}{U}\tilde{t} \\ p = \frac{\rho U^2}{L}\tilde{p} \\ \vec{F} = \frac{U^2}{L}\vec{\tilde{F}} \ , \end{cases} \tag{6}$$

gdzie jako jednostkę masy przyjeliśmy ρL^3, a falka oznacza zmienną bezwymiarową. Wybór jednostek jest oczywiście dowolny, ale wygodnie jest jeśli odzwierciedlają one faktyczne skale występujące w zagadnieniu.

Po wstawieniu tych wielkości do równania (1) i po jego uporządkowaniu otrzymamy następujące zależności,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\vec{\tilde{v}} \cdot \nabla)\vec{\tilde{v}} = -\nabla \tilde{p} + \dfrac{1}{Re}\triangle \vec{\tilde{v}} + \vec{\tilde{F}} \\ \nabla \cdot \vec{\tilde{v}} = 0 \ , \end{cases} \tag{7}$$

Widać, że w powyższym układzie równań występuje tylko jeden współczynnik, odwrotność liczby Reynoldsa. Jego rozwiązania są więc takie same dla takich samych liczb Reynoldsa. Oczywiście takie same muszą być również warunki brzegowe wyrażone w zmiennych bezwymiarowych. Stąd liczba Reynoldsa jest nazywana liczbą podobieństwa. Przepływy o takiej samej geometrii, posiadające taką samą liczbę Reynoldsa są identyczne, z dokładnością do jednostek. Pozwala to na modelowanie zjawisk mikroskopowych w skali makro. Wystarczy, zwiększając rozmiary układu, zwiększyć proporcjonalnie lepkość płynu i zastosować odpowiednie warunki brzegowe. Warto podkreślić, że jest to rozumowanie ścisłe, nie wymagające żadnych przybliżeń.

Innym spostrzeżeniem jest fakt, że dla małych liczb Reynoldsa współczynnik przy członie opisującym siły lepkie jest bardzo duży. Potwierdza to nasze wcześniejsze rozważania na temat istotności lepkości w przepływach Stokesa. Wielkością, której znaczenie ciężko jest oszacować jest gradient ciśnienia. Ciśnienie silnie zależy od geometrii przypływu, gdyż jest ono odpowiedzią płynu na próbę jego ściskania. Charakterystyczna skala zmian ciśnienia nie wiąże się bezpośrednio z charakterystyczną długością i prędkością.

3 Symetria względem odwrócenia czasu

Rozważmy przepływ, dla którego liczba Reynoldsa jest na tyle mała, że możemy stosować równania Stokesa. Niech $\vec{v}_0$ i p_0, będą rozwiązaniami równań (5), dla pewnych sił zewnętrznych $\vec{F}_0$, spełniającymi warunki brzegowe postaci,

$$G(\vec{v}, \nabla\vec{v}) \mid_{\partial\Omega} = 0 \ , \tag{8}$$

gdzie G jest pewną funkcją prędkości i jej pochodnych określoną na brzegu rozważanego obszaru. Sprawdźmy, że $\vec{v}_1 = -\vec{v}_0$ i $p_1 = -p_0$ spełniają równania (5) dla sił zewnętrznych równych $\vec{F}_1 = -\vec{F}_0$,

$$\begin{cases} \mu\triangle\vec{v}_1 - \nabla p_1 = -(\mu\triangle\vec{v}_0 - \nabla p_0) = \vec{F}_0 = -\vec{F}_1 \\ \nabla \cdot \vec{v}_1 = -\nabla \cdot \vec{v}_0 = 0 \ . \end{cases} \tag{9}$$

Rozwiązania te będą spełniały warunki brzegowe,

$$G(-\vec{v}, -\nabla\vec{v}) \mid_{\partial\Omega} = 0 \ . \tag{10}$$

Zastanówmy się jaka jest interpretacja nowych rozwiązań. Nowa prędkość jest w każdym punkcie przeciwna do pierwotnej. Oznacza to, że ruch w polu prędkości $\vec{v}_1$ jest cofaniem się w czasie w porównaniu do ruchu w polu $\vec{v}_0$.

Pewien niepokój może budzić ujemne ciśnienie lecz należy pamiętać, że dla nieściśliwego płynu nie ma znaczenia bezwzględna wartość ciśnienia, a jedynie jego gradient. Możemy do starego i nowego pola ciśnienia dodać stałą wartość tak aby całkowite ciśnienie było dodatnie. Sprawdźmy co oznaczają nowe warunki brzegowe dla rozważanego przepływu. Jeżeli funkcja G jest jednorodna, to warunki brzegowe nie zmienią się. Jest to przypadek powierzchni swobodnej lub spoczywającej ścianki. Gdy ścianka porusza się, warunek brzegowy jest postaci,

$$\vec{v}(\vec{r}) \mid_{\partial\Omega} = \vec{u}_w \ . \tag{11}$$

W tym przypadku nowy warunek brzegowy będzie miał postać,

$$\vec{v}(\vec{r}) \mid_{\partial\Omega} = -\vec{u}_w \ . \tag{12}$$

Wniosek, jaki możemy wyciągnąć z powyższych rozważań jest taki, że w przepływach o bardzo małych liczbach Reynoldsa, możemy cofnąć ruch płynu przez zmianę kierunku działania sił oraz zastosowanie odpowiednich warunków brzegowych ([2],[3]). Nie uzyskamy takiego efektu gdy liczba Reynoldsa jest duża. Dla przykładu, powolne mieszanie herbaty w szklance za pomocą łyżeczki będzie charakteryzowane przez liczbę Reynoldsa rzędu stu[2]. Oczywiście, gdy w czasie mieszania zaczniemy poruszać łyżeczką do tyłu z taką samą prędkością nie odwrócimy ruchu herbaty w całej szklance. W tym przypadku stosunkowo małe siły lepkie nie są w stanie zrównoważyć bezwładności płynu.

4 Odbicie względem płaszczyzny symetrii

Symetria względem odwrócenia czasu występuje zawsze, niezależnie od geometrii układu. Jednak, w niektórych sytuacjach możemy rozważać również inne transformacje pola prędkości i ciśnienia, będące nowymi rozwiązaniami równań Stokesa. Rozważmy układ, który posiada płaszczyznę symetrii. Bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że jest to płaszczyzna o równaniu $z = 0$. Znów niech $\vec{v}_0(x, y, z)$ oraz $p_0(x, y, z)$ będą rozwiązaniami równań (5) dla sił zewnętrznych równych $\vec{F}_0(x, y, z)$, spełniającymi warunki brzegowe postaci (6). Jawne przedstawienie współrzędnych jest celowym posunięciem, gdyż w tym przypadku będą one odgrywać rolę. Zdefiniujmy następujące pola prędkości, ciśnienia oraz sił zewnętrznych,

$$\begin{cases} v_{1x}(x,y,z) = v_{0x}(x,y,-z) \\ v_{1y}(x,y,z) = v_{0y}(x,y,-z) \\ v_{1z}(x,y,z) = -v_{0z}(x,y,-z) \\ p_1 = p_0 \\ F_{1x}(x,y,z) = F_{0x}(x,y,-z) \\ F_{1y}(x,y,z) = F_{0y}(x,y,-z) \\ F_{1z}(x,y,z) = -F_{0z}(x,y,-z) \end{cases} \tag{13}$$

W równaniach zamiana współrzędnej z na $-z$ ujawni się w czasie różniczkowania względem tej współrzędnej. Pierwsza pochodna względem z zmieni znak, druga pochodna pozostanie taka sama. Wynika z tego, że równania Stokesa na współrzędną x i y pola prędkości są spełnione. Sprawdźmy, że podobnie jest z równaniem na składową z oraz równaniem ciągłości,

$$\begin{aligned} \triangle v_{1z}(x,y,z) - \frac{\partial p_1}{\partial z}(x,y,z) = -(\triangle v_{0z}(x,y,-z) - \frac{\partial p_0}{\partial z}(x,y,-z)) = \\ = F_{0z}(x,y,-z) = -F_{1z}(x,y,z) \ , \end{aligned} \tag{14}$$

[2]Przyjmując nastepujące skale $L = 1\text{cm}$, $U = 1\text{cm/s}$, $\nu = 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{v}_1(x,y,z) &= \frac{\partial v_{1x}}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z}(x,y,z) = \\
&= \frac{\partial v_{0x}}{\partial x}(x,y,-z) + \frac{\partial v_{0y}}{\partial y}(x,y,-z) - \frac{\partial - v_{0z}}{\partial z}(x,y,-z) = \\
&= \nabla \cdot \vec{v}_0(x,y,-z) = 0 \; .
\end{aligned} \tag{15}
$$

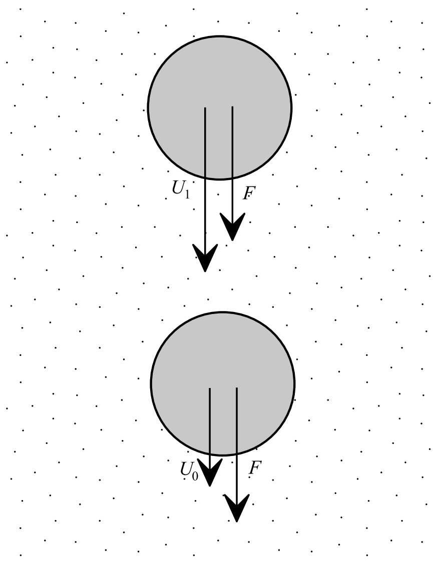
Oczywiście odpowiedniej transformacji wymagają warunki brzegowe. To właśnie one wymagają aby układ miał płaszczyznę symetrii. Jeżeli są one określone w punkcie (x, y, z) to muszą być też określone w punkcie $(x, y, -z)$. Podobnie jak w poprzednim zagadnieniu najprostsze jednorodne warunki brzegowe nie ulegną zmianie. Jeżeli natomiast na brzegu zadana jest niezerowa prędkość, to będzie się ona transformowała tak jak inne wielkości wektorowe we wzorze (13).

Interpretacja nowych rozwiązań jest bardziej geometryczna niż fizyczna. Nowe pole prędkości jest lustrzanym odbiciem starego. Ta symetria nie jest specjalnie zaskakująca. Spodziewalibyśmy się, że jeżeli układ jest symetryczny to płyn równie dobrze może poruszać się w jedną jak i drugą stronę. Tu nasze intuicje nie zawodzą ponieważ oryginalne równania Navier-Stokesa również posiadają tę symetrię, czego nie będziemy pokazywać.

Przykład

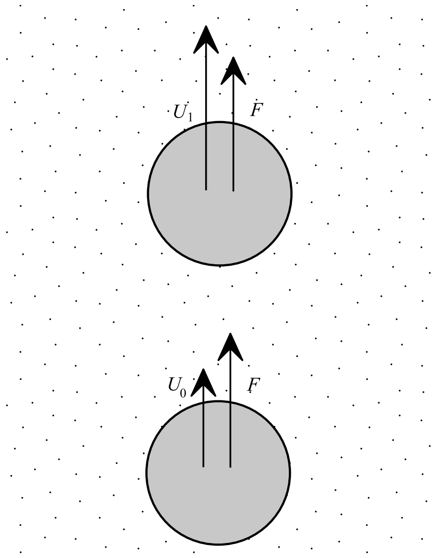
Rozważmy ruch dwóch jednakowych kulek w nieskończonej przestrzeni. Na obie kulki działają takie same siły, skierowane w dół, wzdłuż osi z. Możemy postawić pytanie, czy obie kulki będą poruszały się z taką samą prędkością. Jeżeli nie, to która będzie poruszała się szybciej?

Ponieważ mamy wyróżniony jedynie kierunek osi z to kulki muszą poruszać się właśnie wzdłuż tej osi. Załóżmy, że dolna kulka porusza się wolniej (Rysunek 1). Zastosujmy



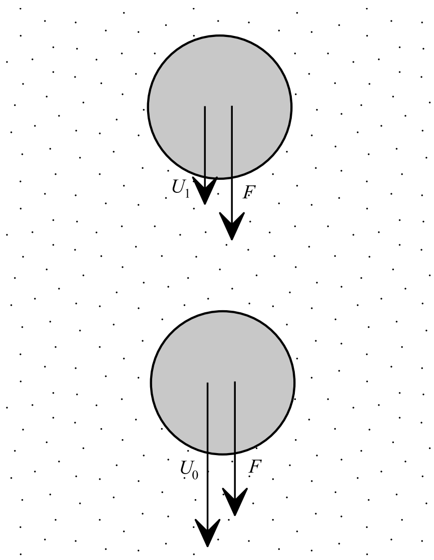
Rysunek 1: Początkowy ruch kulek.

symetrię względem odwrócenia czasu. Prędkość płynu w każdym punkcie zmieni kierunek na przeciwny, a więc również kulki będą poruszały się w przeciwną stronę. Działające na nie siły są związane liniową zależnością z prędkością płynu, więc także zmienią zwrot (Rysunek 2).



Rysunek 2: Ruch kulek po zastosowaniu symetrii względem odwrócenia czasu.

Zastosujmy jeszcze odbicie pola prędkości względem płaszczyzny prostopadłej do osi z i znajdującej się w połowie odległości między kulkami (Rysunek 3). Mamy sytuację prawie taką samą jak na początku, z tym że teraz górna kulka porusza się wolniej.



Rysunek 3: Ruch kulek po zastosowaniu obu transformacji.

Równania Stokesa są liniowe, więc ich rozwiązania są jednoznaczne. Otrzymaliśmy dwa rozwiązania, które nie są sprzeczne jedynie gdy prędkości obu kulek są równe. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla kulek spadających obok siebie, aby przekonać się, czy odległość między nimi pozostanie stała.

Literatura

[1] M.L. Ekiel-Jeżewska, Hydrodynamika mikroświata, notatki do wykładów.

[2] A. Myłyk, M.L. Ekiel-Jezewska, „Odwracalność mikroprzepływów”, Postępy Fizyki 2008, T.59, z.6, s.238-243.

[3] G.I. Taylor, „Low Reynolds number flows, Encyclopedia Britannica Educational Corp., Chicago, 1985, video No 21617 (originally a colour sound film, Educational Services Inc., 1967).