Wykład 1 6.10.2009

Przepływy o niskich liczbach Reynoldsa + cząstki

$$\boxed{\frac{V \cdot L}{\nu} << 1}$$

Przykłady: filmy

Wpływ bezwładności płynu jest zaniedbywalnie mały

R-nia Naviera Stokesa

r. Newtona dla elementu płynu

element płynu o objętości = 1

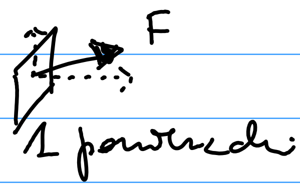
masa · przyspieszenie = siły powierzchniowe + siły objętościowe

Przykład:

siły objętościowych ⇒ grawitacja, siły elektromagnet.
$\rho \cdot g$

siły powierzchniowych ⇒ ciśnienie, tarcie lepkie.

naprężenie = siła na 1 powierzchni
(stress)



mekiel@ippt.gov.pl
ekiel.jezewska@gmail.com ←

Płyn nieściśliwy

$$\boxed{\rho\underbrace{\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v}\right]}_{\text{siła bezwładności}} = -\bar{\nabla} p + \mu \Delta \bar{v}} \quad (1)$$

r. Naviera-Stokesa

$$\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\Delta = \bar{\nabla}^2 = \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}$$

$$= -\bar{\nabla}\tilde{p} + \mu\Delta\bar{v} + \underbrace{\rho\bar{\nabla}\psi}_{\text{siła objętościowa}} = -\nabla p + \mu\Delta\bar{v}$$

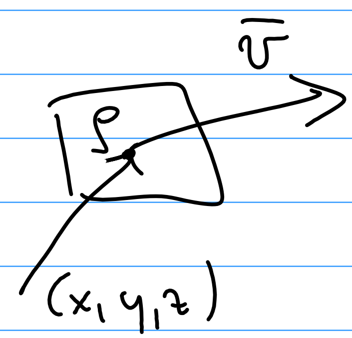
$\tilde{p}$ - ciśnienie

$p \to p$ zmodyfikowane $= p +$ grawitacja

Laplasjan

Δ to taka druga pochodna
w 3 wymiarach
zmiana zmiany

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



$$\bar{v}(x, y, z, t)$$
$$\rho(x, y, z, t)$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{c}\text{Nieściśliwość:}\\ \bar{\nabla}\cdot\bar{v} = 0\end{array}} \quad (2)\\ \boxed{0 = -\bar{\nabla}p + \mu\Delta\bar{v}} \quad (3)\end{array}\right\} \text{r. Stokesa}$$

Elektrostatyka – czy jest analogia z hydrostatyką Stokesa?

$\rho(\bar{r})$

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\phi(\bar{r})$

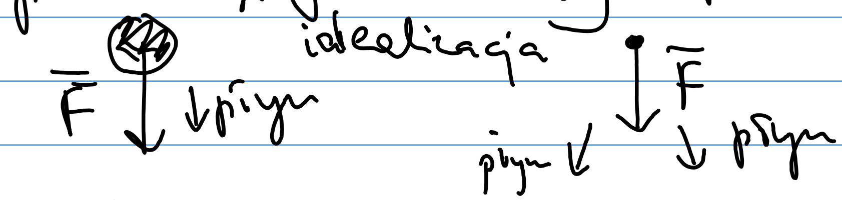
ładunek punktowy $\rho = q\,\delta(\bar{r})$

$$\phi \longleftrightarrow \bar{v} \qquad \varepsilon_0 \Delta\phi = -q\,\delta(\bar{r})$$

$$q \longleftrightarrow \bar{F} \qquad \mu\Delta\bar{v} - \bar{\nabla}p = -\bar{F}\,\delta(\bar{r})$$

elekt hydr

Siła punktowa $\bar{F}\,\delta(\bar{r})$ „∞ mała"
cząstka ciągnie płyn poruszając się pod wpływem siły $\bar{F}$



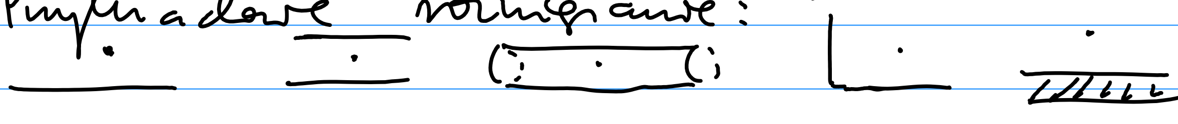
Pytanie: jak wygląda pole prędkości wywołane działaniem siły punktowej?

$\boxed{\text{Cele}}$

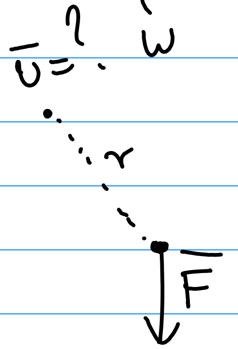
1° Zobaczyć to pole prędkości (stokeslet)

2° Jak to pole prędkości się zmieni gdy są jakieś „brzegi" płynu (np. naczynie, ośrodek filtracyjny, itp. np. granica między 2 płynami)?

Przykładowe rozwiązanie:



3. Cel: stworzenie ładnych obrazków (a może filmów i gifów też) w celach dydaktycznych

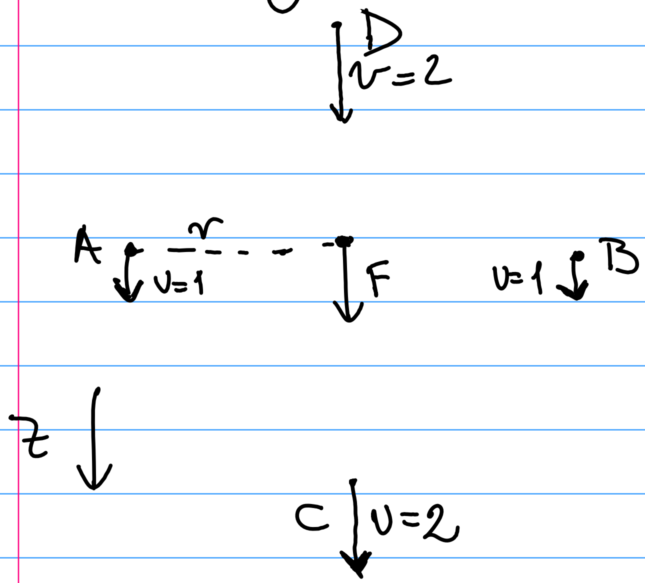


$$\bar v(\bar r) = \frac{1}{8\pi\mu r}\overbrace{\underbrace{\left[\bar{\bar I} + \hat r \hat r\right]}_{\text{czynnik kierunkowy}}}^{\text{tensor Oseena}}\cdot \bar F$$

$$\boxed{-\bar\nabla p + \mu \Delta \bar v = -\bar F \delta(\bar r)}$$

wyprowadzenie można znaleźć w [4] "by comparing" [5] "by Fourier transform"

Przewidywanie:



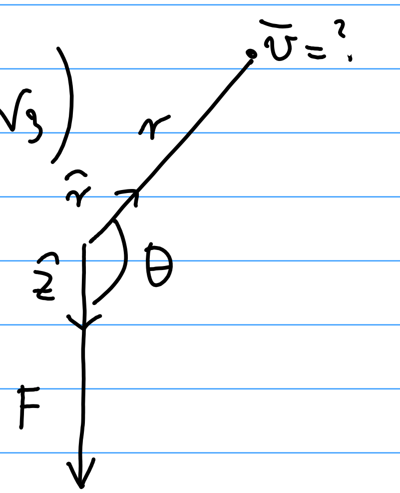
Pole prędkości zależy od:
- odległości r
- kierunku

Gdzie szybciej: w A, B, C, czy D?

$v_A = v_B$ (z symetrii)

$$[\hat r \hat r]_{ij} = (r_i r_j)/r^2$$

$$\bar r = (r_1, r_2, r_3)$$

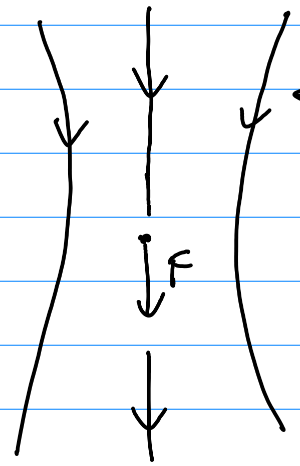


$$\frac{\bar v \cdot 8\pi\mu r}{F} = \hat z + \hat r \underbrace{\hat r \cdot \hat z}_{\cos\theta}$$

↑ wektor 1 wzdłuż z

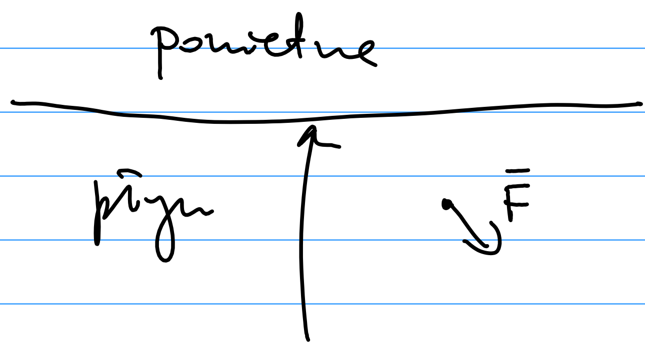
$$\frac{v_z 8\pi\mu r}{F} = 1 + \cos^2\theta$$

$$\frac{v_s \cdot 8\pi\mu r}{F} = \sin\theta\cos\theta$$



linie prądu (streamlines)

Zadanie domowe (dla chętnych)



jakie są linie prądu i pole prędkości płynu

powierzchnia swobodna

Warunki brzegowe na pow. swobodnej:

1) $\bar{v} \cdot \bar{t}$ ciągła — styczna prędkość ciągła

2) $\underbrace{t \cdot \sigma \cdot n}_{\text{naprężenia styczne znikają}} = 0$

3) $\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$ płyn nie deformuje powierzchni ani przez nią nie przechodzi

Odnośniki do literatury + filmów

1. Taylor Low Reynolds number flows
2. Homsy Multimedia Fluid Dynamics
3. Filmy wine MEJ (do wglądu)
4. C. Pozrikidis "Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow" Cambridge Univ. Press 1992 § 2.2
5. Kim, Karrila, "Microhydrodynamics" Dover 2005 Exercise 2.9