

## Wykład 1

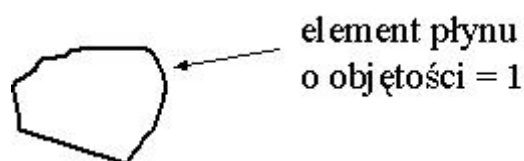
### Przepływy o niskich liczbach Reynoldsa + cząstki

Przykłady i filmy:

$$\frac{V \cdot L}{\nu} \ll 1 \quad (1)$$

wpływ bezładności płynu jest zanedbywalnie mały.

### Równania Naviera Stokesa, równanie Newtona dla Elementu płynu:



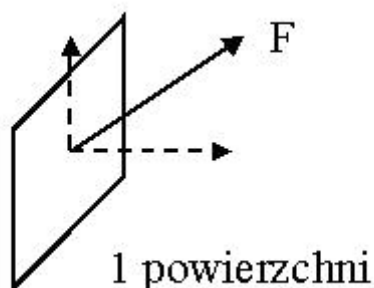
masa \* przyspieszenie = siły powierzchniowe + siły objętościowe

Przykład:

**siły objętościowe:** grawitacja, siły elektromagnetyczne;

**siły powierzchniowe:** ciśnienie, tarcie lepkie;

napężenie (stress) = siła na jednostkę powierzchni



Płyn nieściśliwy:

$$\begin{cases} \rho \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) u \right] = -\bar{\nabla} p + \mu \Delta \bar{v}, \\ -\bar{\nabla} \tilde{p} + \mu \Delta \bar{v} + \rho \bar{\nabla} \psi = -\nabla p + \mu \Delta \bar{v} \end{cases} \quad (2)$$

gdzie:

$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) u$  - siła bezładności,

$-\bar{\nabla} p + \mu \Delta \bar{v}$  - równanie Naviera-Stokesa,

$\rho \bar{\nabla} \psi$  - siła objętościowa,

$\tilde{p}$  - ciśnienie,

$\bar{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ,

$\Delta = \bar{\nabla}^2 = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}$ ,

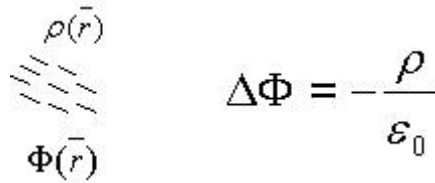
Laplasjan  $\Delta$ , to taka druga pochodna w trzech wymiarach (zmiana zmiany)  $\bar{v}(x,y,z,t)$ ,  $\rho(x,y,z,t)$ .

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3)$$

Nieściśliwość równania Stokesa:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{u} = 0, \\ 0 = -\nabla p + \mu \Delta \bar{v} \end{cases} \quad (4)$$

Elektrostatyka – czy jest analogia z hydrostatyką Stokesa?



$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ładunek punktowy  $\rho = q\delta(\bar{r})$

elektrostatyka

$$\Phi \longleftrightarrow \bar{v}$$

$$q \longleftrightarrow \bar{F}$$

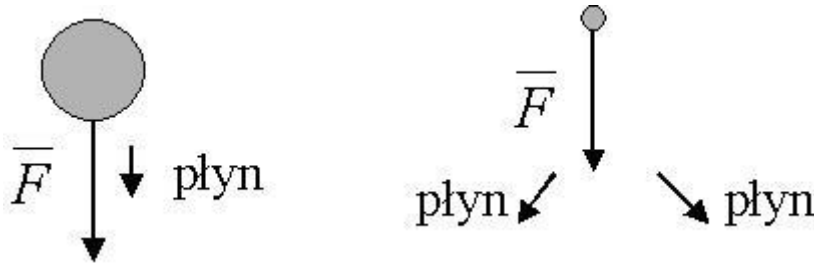
hydrodynamika

$$\epsilon_0 \Delta \Phi = -q\delta(\bar{r})$$

$$\mu \Delta \bar{v} - \nabla p = -\bar{F}\delta(\bar{r})$$

Siła punktowa  $\bar{F}\delta(\bar{r})$  jest nieskończenie mała - cząstka ciągnie płyn poruszając się pod wpływem siły  $\bar{F}$ .

idealizacja:

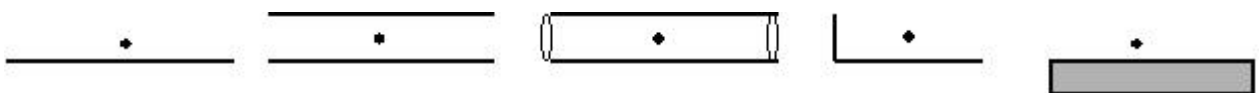


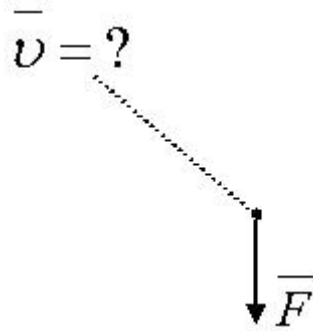
Pytanie: jak wygląda pole punktowe wywołane działaniem siły punktowej??

Cele:

1. Zobaczyć to pole prędkości (Stokeslet)
2. Jak to pole prędkości się zmienia, gdy są jakieś "brzegi" płynu (np. naczynie, ośrodek filtracyjny, granica między dwoma płynami, itp)

Przykładowe rozwiązanie:





3. Stworzenie naszych obrazków (a może filmów i zdjęć też) w celach dydaktycznych

Tensor Oseena:

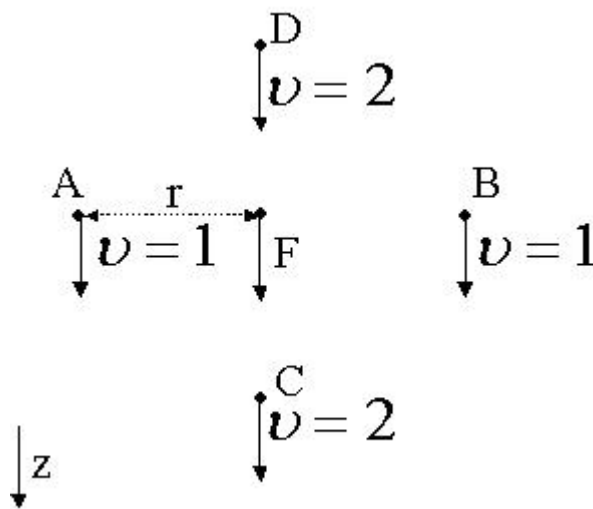
$$\bar{v}(r) = \frac{1}{8\pi\mu r} [\bar{I} + \bar{r}\bar{r}] \cdot \bar{F} \quad (5)$$

gdzie:

$[\bar{I} + \bar{r}\bar{r}] \cdot \bar{F}$  - czynnik kierunkowy.

$-\bar{\nabla}p + \mu\Delta\bar{v} = -\bar{F}\delta(\bar{r}) \rightarrow [\bar{I} + \bar{r}\bar{r}] \cdot \bar{F}$  - wyprowadzenie można znaleźć w ([?]) by "Comparing"

Przewidywanie:



Pole prędkości zależy od:

- odległości
- kierunku

Gdzie szybciej w A, B, C czy D?

$$[\hat{r}\hat{r}]_{ij} = \frac{r_i r_j}{r^2} \quad (6)$$

gdzie:

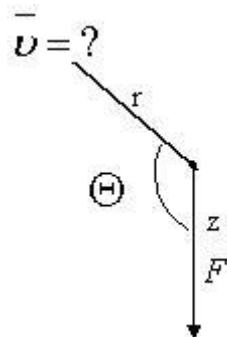
$r = (r_1, r_2, r_3)$ ;

$$\frac{\bar{v} \cdot 8\pi\mu r}{F} = \hat{z} + \hat{r}\hat{r} \cdot \hat{z} \quad (7)$$

gdzie:

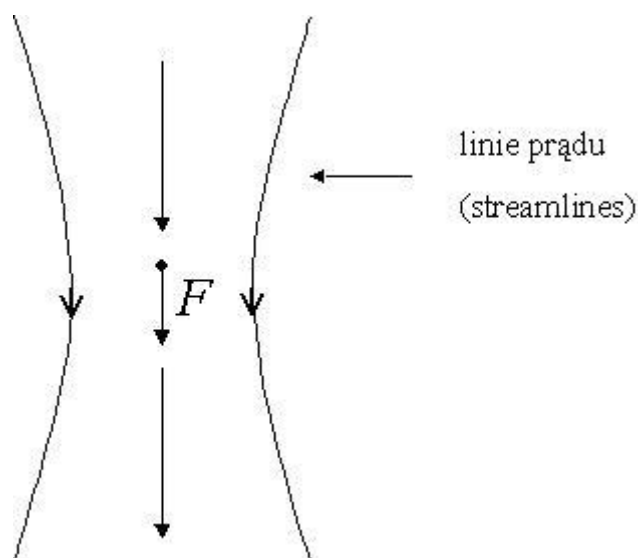
$\hat{z}$  - wektor jednostkowy wzdłuż osi z,

$\hat{r} \cdot \hat{z} = \cos\Theta$ .

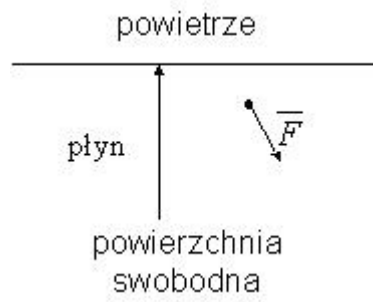


$$\frac{v_z \cdot 8\pi\mu r}{F} = 1 + \cos\Theta, \quad (8)$$

$$\frac{v_\rho \cdot 8\pi\mu r}{F} = \sin\Theta \cos\Theta, \quad (9)$$



Zadanie domowe dla chętnych:



Jakie są linie prądu  
i pole prędkości  
płynu?

Warunki brzegowe na powierzchni swobodnej:

1.  $\bar{v} \cdot \bar{t}$  - ciągła styczna prędkość,
2.  $\bar{v} \cdot \sigma \cdot n = 0$  - naprężenia styczne snikają,
3.  $\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$  - płyn nie deformuje powierzchni ani przez nią nie przechodzi.