

Wykład 2

3.11.2009

Reynolds Nawce - Sobies

Konsultacje
Wtorek 15⁴⁵ - 16⁴⁵
pokrój 323

$$\bar{v}(\bar{r}, t) = \bar{v} - \text{predkosc' plynu}$$

$$p(\bar{r}, t) = p - \text{cisnienie plynu}$$

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma}$$

Wykład: 13¹⁵ - 16⁴⁵
Przena: 14³⁰ - 14⁴⁵

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} \right) - \delta_{ij} p$$

Prawo podobienstwa

Dobieramy jednostki potencjalnie L ,
predkosc' V

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta}$$

$\frac{\eta}{\rho} = \nu$ - lepkość kinematyczna

Bez wymiarowe predkosc' $u = \frac{v}{V}$

$$\bar{x} = \frac{\bar{r}}{L} \quad \bar{t} = \frac{tV}{L}$$

$$Re \frac{D\bar{u}}{D\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \cdot \bar{\sigma}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \bar{p}$$

\bar{p} - cisnienie bezwymiarowe

Zadane dane: wyznaci

\bar{p} w funkcji p

Re - liczba Reynoldsa

To samo rownanie dla wymptlich
talich wartosci, lubo maiz η
same liczba Reynoldsa

Film 535

Zagadka (film 5.35 Housy Multimedia Flow Flow) - 2 jakeg przedlozie V pomine pomnas 60 samochod a dlugosi 6 stop, aby modelowac nudi dlugos samochod (18 stop dlugosci) jadacego z przedlozie 60 mph?

Wynti anwety (17 odpowiedzi)

180 mph	10 osoba
160 mph	1 osoba
podmieszyci	1 osoba
60 mph	1 osoba
60 mph	3 osoby
18 mph	1 osoba

W wodnym mikroświecie
 $Re \ll 1$

Równanie Naviera-Stokesa redukcyjne
 są do równań Stokesa

$$\boxed{\eta \nabla^2 \bar{v} - \nabla \bar{p} = 0} \quad (*) \quad \boxed{\nabla \cdot \bar{v} = 0}$$

zawarte są warunki
 (ciężenie zaniedbywane)

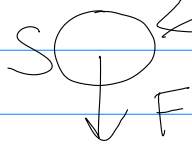
Jaki rodzaj r. Stokesa?

Np. dla 1 części, która może się
 pod wpływem r. F - jeżeli jest
 pole przedmiotów płyn wygenerowane przez ten
 ruch

(*) + warunki brzegowe

1° w ∞ (tam $\bar{v}(\bar{r}) = 0$)

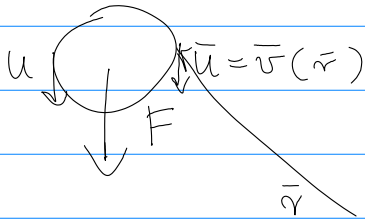
2° warunki brzegowe przylegania (stick b.c.)
 no-slip b.c.)
 przedmiot płyn jest równe
 pow. kuli jest równe
 lokalnie przedmiot kuli



$$\bar{v}(\bar{r}) \Big|_{\bar{r} \in S} = \bar{u} + \bar{\Omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_0)$$

$\bar{r} \in S$: powierzchnia kuli
 \bar{u} : prędkość kuli translacyjnie
 $\bar{\Omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_0)$: rotacyjnie
 \bar{r}_0 : położenie środka kuli

Kulka spadająca grawitacyjnie w ∞
 przytę nie może być
 dośrodkowa (wyniknie to
 z symetrii układu)
 $\vec{\Omega} = \vec{0}$



Linie prądu płyną wokół kulki oraz ich
 powstanie z liniami prądu wokół punktu -
 wyłuszczy Pistoła Kortcyłce kulki punkt.pdf over punkt.pdf
 Dlaczego symetria gwie- dzt?

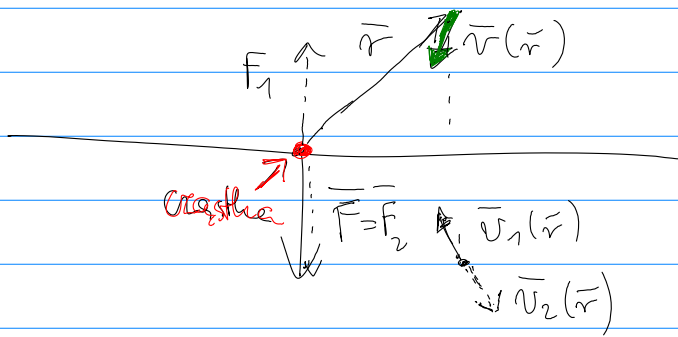
Odwzorowanie w czasie równań Soblese;

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \rightarrow -\vec{v} \\ p \rightarrow -p \end{array} \right\} \text{inwersja względem} \\ \text{czasu transformacji}$$

Dygresja

Cisnienie w α . Soblese pełni rolę
 podnieźnia, ponieważ mamy dodatkowy
 miaz ma przedłość w postaci równania
 możliwości $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Wytarany radar
 w. bnepowe me przedłość, a cisnienie
 jwi wyniknie z równań.

Superpozycja 1° oddzia \acute{c} ania \cup przesuni \acute{e} cie
 2° powi \acute{a} zywanie równoleg \acute{e} lych \cup przesuni \acute{e} cie
 2° odnośnie czasu:



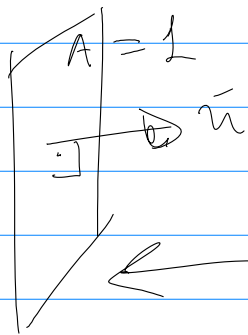
własności: pole prądu
 ma symetryczny kształt
 ma rysunek PK
 F - prąd
 linie prądu

$F_1 \rightarrow F_2$ jest wtedy ważne

Mamy równowagę ciał dźwigniowych
 ma funkcje:

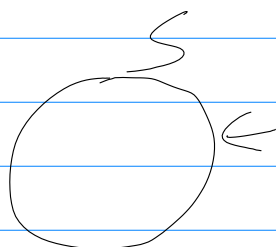
co równowagę prądu?
 siła oporu prądu
 Jaki jest obliczenie?

$\vec{\sigma}$ - tensor naprężenia



$\vec{u} = \vec{\sigma}$ siła działająca
 ma to jednostkowe
 powiększenie

ta siła jest związane
 z naprężeniami lepkości



całkowite siły oporu, jakie
 przy stanie ustalonym:

$$\vec{F}_H = \int dS \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = -\vec{F}$$

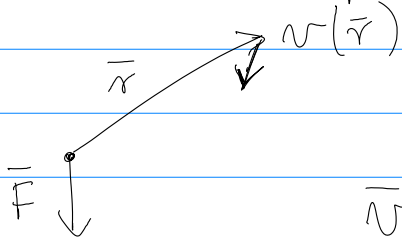
$$\sigma_{ij} = \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} v \rightarrow -v \\ p \rightarrow -p \end{array} \right\} \vec{F} \rightarrow -\vec{F}$$

Siła hydrodynamiczna zmienia znak przy transformacji odwrócenia czasu

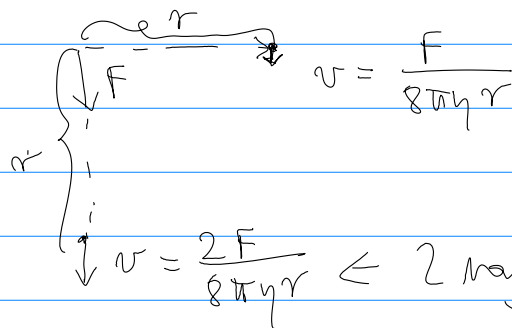
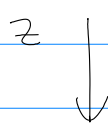
mekiel@ippt.gov.pl
mekiel.jezewska@gmail.com

Pole prędkości prądu wokół cząstki punktowej
która znajduje się w punkcie $\vec{r} = 0$



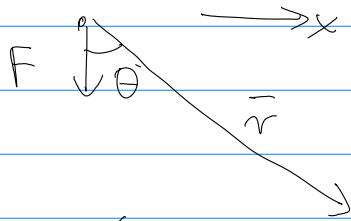
$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{8\pi\eta r} (\vec{I} + \hat{r}\hat{r})$$

wektor \hat{r} to wektor jednostkowy wzdłuż \vec{r}
 $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ $r = |\vec{r}|$



$v = \frac{2F}{8\pi\eta r} \leftarrow$ 2 razy większy niż tutaj

$$v_z =$$



$$\vec{F} \cdot \vec{r} = F \cos \theta$$

$$\vec{r} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

Zakładamy, że $\vec{r} = (x, 0, z)$ $\vec{F} = (0, 0, F)$

$$\vec{v} = \frac{F}{8\pi\eta r} \left[(0, 0, 1) + \cos \theta (\sin \theta, 0, \cos \theta) \right]$$

$$\vec{v} = \frac{F}{8\pi\eta r} \left[\sin \theta \cos \theta, 0, 1 + \cos^2 \theta \right]$$

Co dalej? Symfonia:

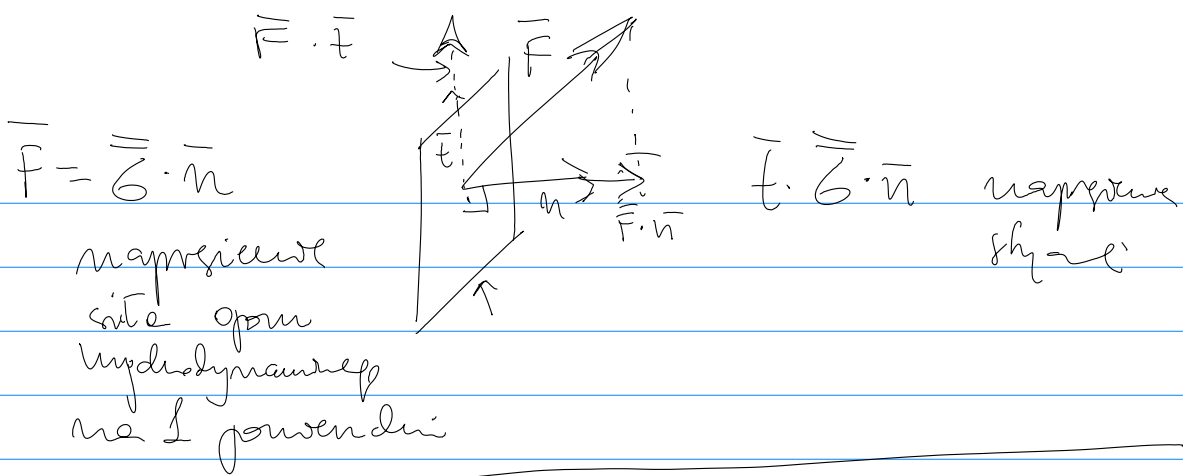
1° Coś powiedzieć na temat wprowadzenia mian na pole prędkości cząstki punktowej

$$\boxed{\eta \nabla^2 \vec{v} - \nabla p = -\vec{F} \delta^3(\vec{r})} \quad (*\neq)$$

wprowadzenie \equiv rozwiązanie równania $(*\neq)$
(czyli podane tensorowo Greena dla tego równania)

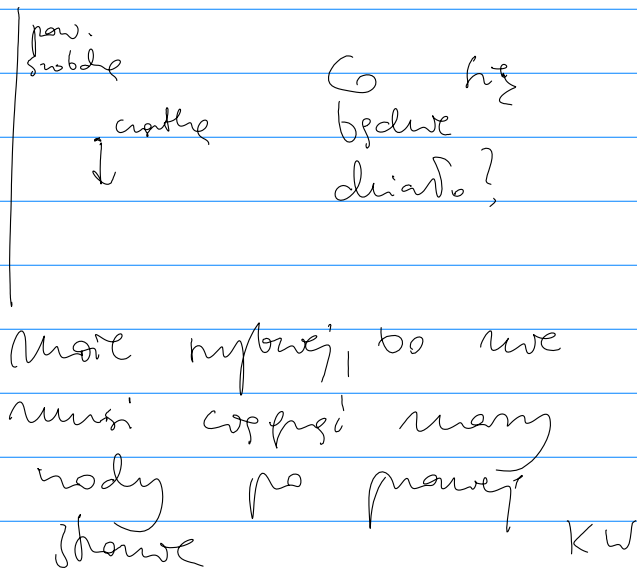
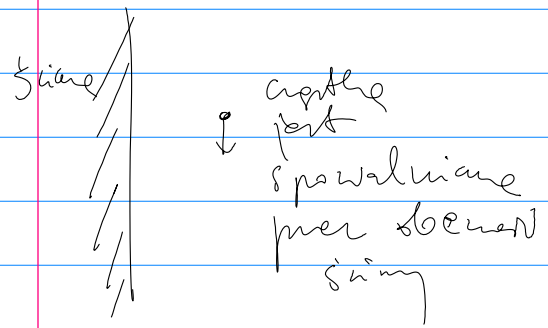
2° Jak ograniczenie prędkości wpływa na pole prędkości? Ciężkie prędkości (tenzory Greena) najwyższego obciążenia cząstki punktowej

2a) powierzchnia swobodna płaska
 $\frac{\text{prędkość } \eta = 0}{\text{prędkość } \eta \neq 0}$ up. $\frac{\text{powietrze}}{\text{woda}}$



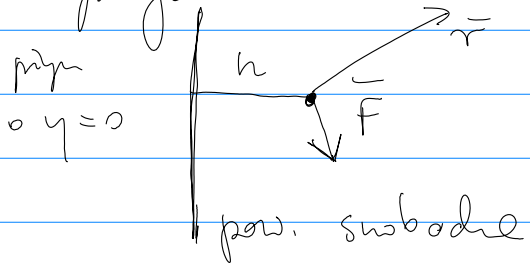
$\vec{t} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = 0$ $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$
 (site sztywne = 0) na pow. swobodnej (hydrodynamika)

Porównanie.



Film 2 przybli zbliżony et al
 Multimedia Fluid Flow nr 178
 ilustrujący warunki brzegowe na pow.
 przynależ 0 $y \neq 0$ i $y = 0$

Pytanie "domowe" - czy istoty czy brzozy
 przyn ma miejsce lepkosci?



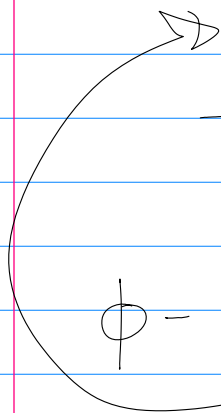
$\vec{v}(\vec{r}, h) = ?$

R-owe linowe \rightarrow metody obrazów? ML

Punktowa metody obrazów

Zadanie punkty nad przewodzący płaszczyzną

• Q



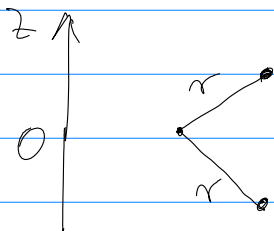
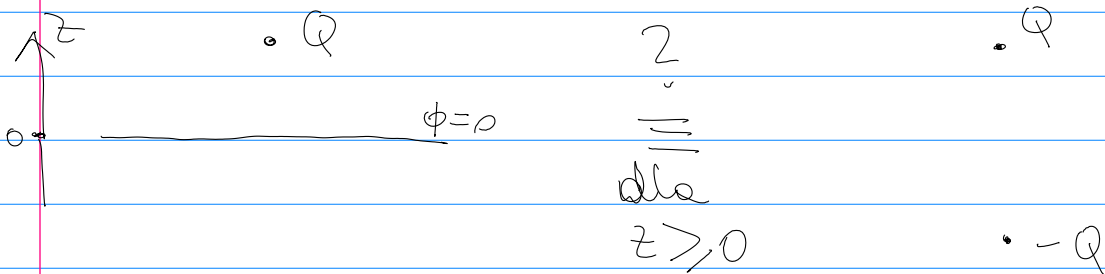
$\phi = 0$, płaszczyzna przewodząca ∞ równoległa płaszczyźnie

ϕ - potencjał elektrostatyczny = ?
funkt.

Dyskrete: w ∞ punkcie potencjał ϕ r - dłużej Q

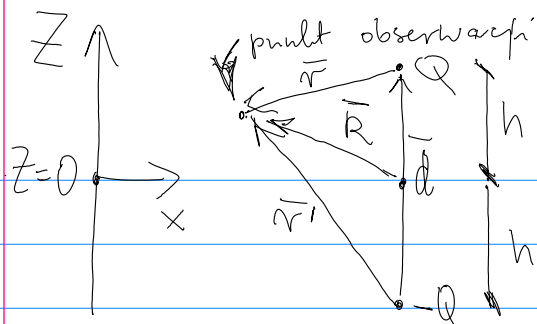
$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Rozszerzenie metody obrazów



$$\phi|_{z=0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$$

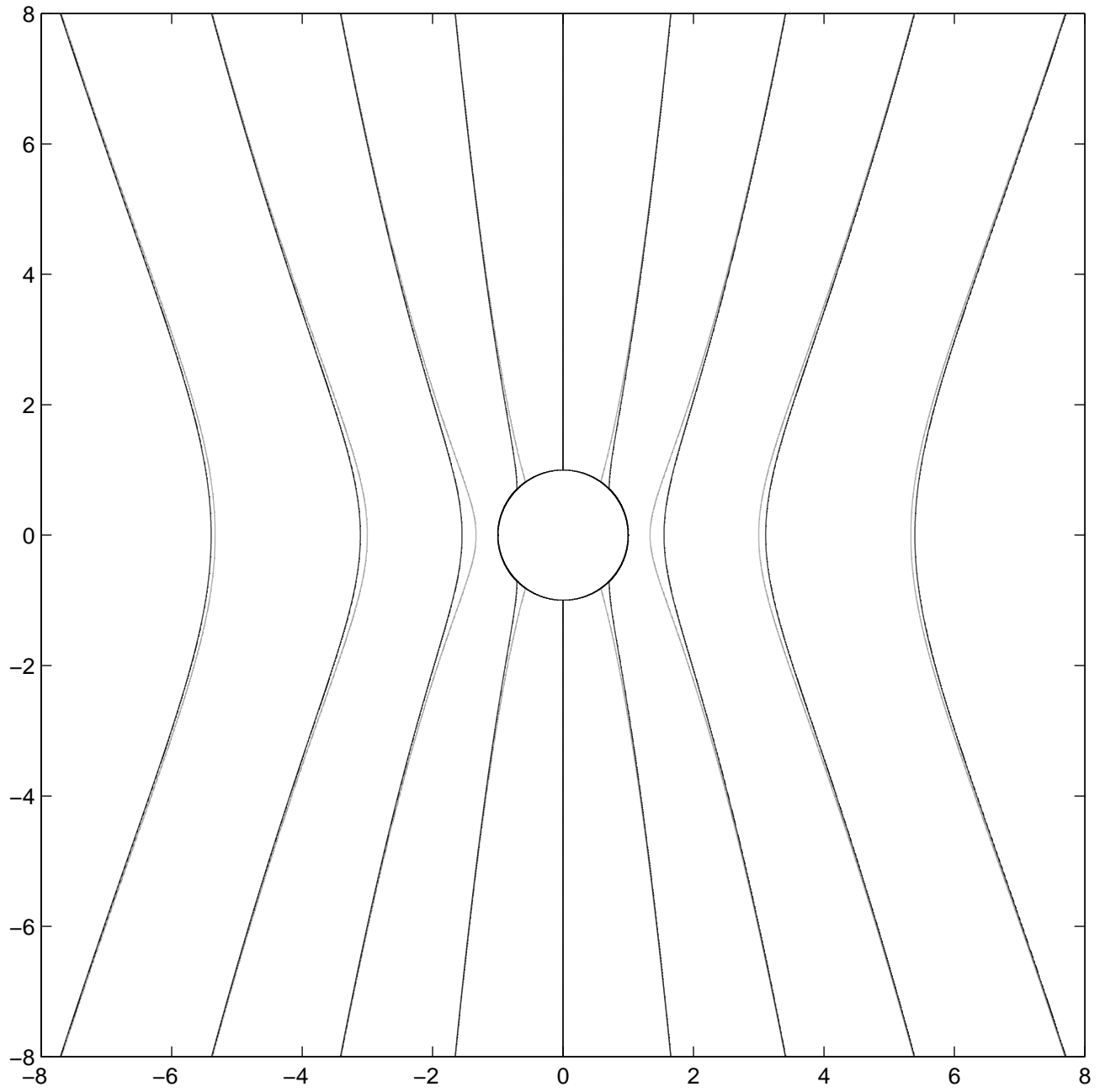
W. bryzoj spełniony

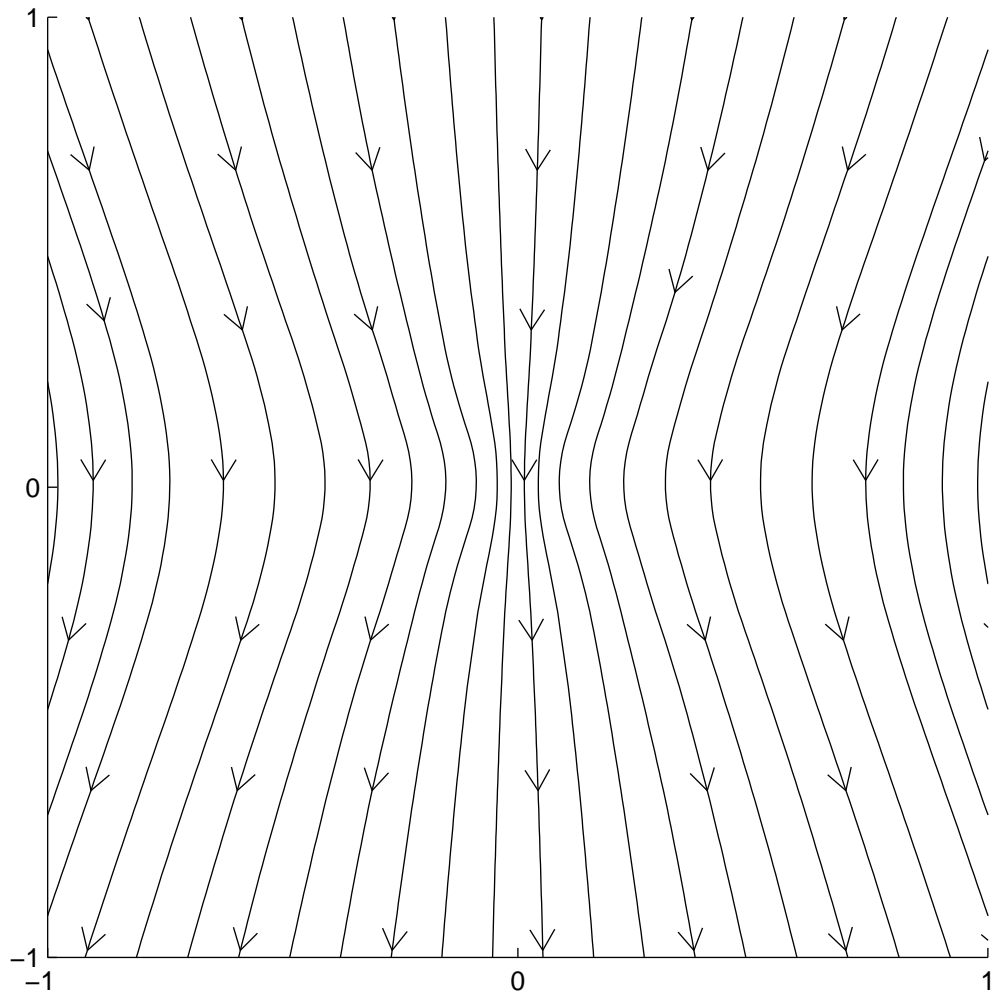


$$\phi(\vec{r}, h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

patrz szczegółowy opis metody
obrotów (autor: Maciej Lisicki)
obrotowy.pdf

Idea jest jasna - jak ją przenieść do
hydrostatyki? Gdzie jest analogia?





Metoda obrazów na prostym przykładzie

Rozważaliśmy problem znalezienia rozkładu potencjału wokół punktowego ładunku w obecności przewodzącej, uziemionej nieskończonej płaszczyzny. Potencjał od ładunku punktowego Q w nieskończonej przestrzeni jest dany przez:

$$\phi_Q(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r = |\mathbf{r}|$$

W obecności płaszczyzny stosujemy metodę obrazów - wprowadzając współrzędne kartezjańskie $\mathbf{R} = (X, Z)$ tak, by obszar nad płaszczyzną odpowiadał $Z > 0$, szukamy pola w tym obszarze poprzez takie umieszczenie ładunku-obrazu w półprzestrzeni $Z < 0$, żeby był spełniony warunek $\phi|_{Z=0} = 0$ (wynikający z uziemienia przewodzącej płaszczyzny). Całkowity potencjał w danym punkcie przestrzeni (\mathbf{r}) jest sumą potencjałów od ładunku i ładunku-obrazu. Ładunek-obraz $-Q$ umieszczamy w odległości h od płaszczyzny (jako lustrzane odbicie ładunku Q). Łatwo widać z symetrii, że na płaszczyźnie przewodzącej

$$\phi|_{Z=0} = \phi_Q(\mathbf{r}) + \phi_{-Q}(\mathbf{r}') = 0$$

Szukamy rozkładu potencjału w całej górnej półpłaszczyźnie. Zatem będzie on sumą potencjałów od ładunku Q i jego obrazu. Niech wektor $\mathbf{d} = (0, 2h)$ łączy nasze ładunki. Jego długość $|\mathbf{d}| = 2h$. Niech teraz wektor \mathbf{r} opisuje odległość od ładunku Q , a wektor \mathbf{r}' odległość od ładunku $-Q$. W dowolnym punkcie mamy potencjał

$$\Phi(\mathbf{r}) = \phi_Q(\mathbf{r}) + \phi_{-Q}(\mathbf{r}')$$

Ale $\mathbf{r}' = \mathbf{d} + \mathbf{r}$. Przepisując na współrzędne $\mathbf{r} = (x, z)$ mamy $\mathbf{r}' = (x', z') = (0, 2h) + (x, z)$. Zapiszmy w jawnej postaci Φ przy pomocy współrzędnych x, z względem ładunku Q :

$$\Phi(x, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + 2h)^2}} \right)$$

Współrzędne ładunku Q w układzie współrzędnych, który wybraliśmy na początku to $(0, h)$. Możemy łatwo zapisać potencjał we współrzędnych $\mathbf{R} = (X, Z)$:

$$\Phi(X, Z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{X^2 + (Z - h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{X^2 + (Z + h)^2}} \right).$$

I już.