Wykład 2

Równania Naviera-Stokesa

$\bar{v}(\bar{r},t) = \bar{v}$ - prędkość płynu
$p(\bar{r},t) = p$ - ciśnienie płynu
ρ - gęstość płynu
$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = \eta(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}) - \delta_{ij} p \tag{2}$$

Prawo podobieństwa

Dobieramy jednostki położenia L i prędkości V

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} \tag{3}$$

gdzie:
$\frac{\eta}{\rho} = \nu$ - lepkość kinetyczna,

Bezwymiarowa prędkość $u = \frac{v}{v}$, $\bar{x} = \frac{\bar{r}}{L}$, $\tau = \frac{tV}{L}$

$$Re \frac{D\bar{u}}{Dz} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \cdot \bar{\sigma} \tag{4}$$

$$\bar{\sigma_{ij}} = (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) - \delta_{ij} \tilde{p} \tag{5}$$

gdzie:
$\tilde{p}$ - ciśnienie bezwymiarowe,

Zadanie domowe: wyrazić $\tilde{p}$ w funkcji p,
Re - liczba Reynoldsa,
to samo równanie dla wszystkich takich ukladów, które mają tę samą liczbę Reynoldsa (Film 535)

Zagadka: (film 5.35 Homsy Multimedia Fluid Flow) – z jaka prędkością V powinien poruszać się samochód o długości 6ft, aby modelować ruch drugiego samochodu (18ft długości) jadącego z prędkością 60km/h?

W wodnym mikroświecie: Re«1
Równania Naviera-Stokesa redukują się do równań Stokesa

$$\eta \nabla^2 \bar{v} - \bar{\nabla} p = 0 (\star) \tag{6}$$

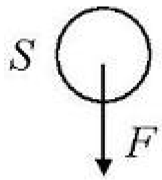
gdzie:
p - zawarta siła grawitacji (ciśnienie zmodyfikowane),

Jak rozwiązać równania Stokesa?!

np. dla jednej cząstki, która porusza się pod wpływem siły $\bar{F}$ jakie jest pole prędkości płynu wygenerowane przez ten ruch?

Równanie ($\star$) + warunki brzegowe

1. w nieskończoności (tam $\bar{v}(\bar{r}) = 0$)
2. Warunki brzegowe przylegania (stick b.c, no-ship b.c)
   prędkość plynu przy powierzchni kulki jest równa lokalnie prędkości kulki



$$\bar{v}(\bar{r})\,|_{\bar{r}\epsilon S}= \bar{U} + \Omega \times (\bar{r} - \bar{r}_o) \tag{7}$$

gdzie:
S - powierzchnia kulki,
$\bar{U}$ - prędkość kulki translacyjna,
$\bar{\Omega}$ - prędkość kulki rotacyjna,
$\bar{r}_o$ - położenie środka kulki,

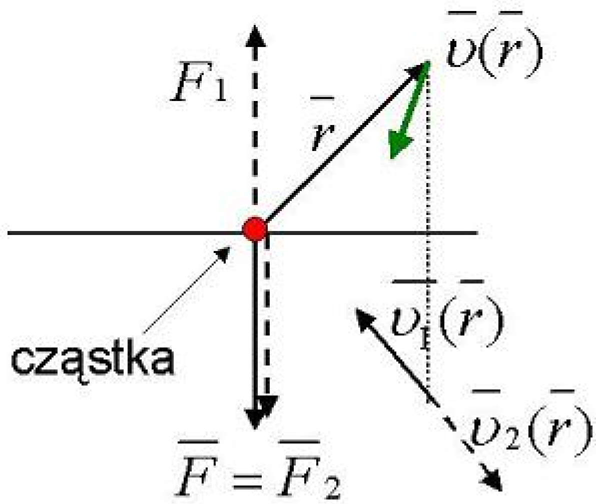
Kulka opadająca grawitacyjnie w nieskończonym płynie nie może się obracać (wynika to z symetrii układu $\bar{\Omega} = \bar{0}$)

Linie prądu płynu wokół kulki oraz ich porównanie z liniami prądu wokół punktu – wykresy Piotrka Korczyka kulka-punkt.pdf oraz punkt.pdf. Dlaczego symetria góra dół?

Odwracalność w czasie równań Stokesa:
$\bar{v} \to -\bar{v}, p \to -p$ - niezmiennicze względem takiej tarnsformacji

Dygresja:
Ćisnienie w równaniach stokesa pełni rolę podrzędną, ponieważ mamy dodatkowy wiąz na prędkość w postaci równania nieściśliwości $\nabla{\cdot}\bar{U} = 0$. Wystarczy zadać warunki brzegowe na prędkość, a ciśnienie już wynika z równań.

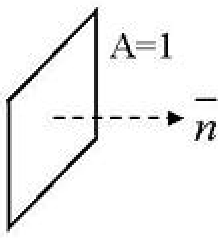
Superpozycja 1) odbicia w płaszczyźnie zawierającej cząstkę oraz 2) odwrócenia czasu:



gdzie:
$\bar{F}$ - grawitacja,
$F_1 \rightarrow F_2$ - jest ...wetrywalne,
wniosek: pole prędkości ma symetrię jak na rysunku PK.

Mamy równowagę sił działających na kulkę:

-co równoważy grwaitację? sila oporu płynu
-jak obliczyc tą siłe?
gdzie:



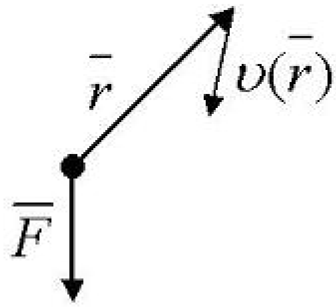
$\bar{\bar{\sigma}}$ - tensor naprężeń,

$\bar{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}}$ jest to siła dzialająca na powierzchnię jednostkową. Siła ta związana jest z naprężeniami lepkości. Siła działająca na powierzchnię kulki jest to całkowita siła oporu, jaką płyn stawia kulce!

$$\bar{F_H} = \int dS\bar{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = -\bar{F} \tag{8}$$

Z warunków: $\bar{\upsilon} \rightarrow -\bar{\upsilon}$ oraz $p \rightarrow -p$ wynika zależność $F \rightarrow -F$. Siła hydrodynamiczna zmienia znak przy transformacji odwrócenia czasu.

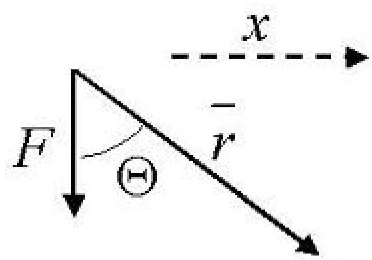
Pole prędkości plynu wokół cząstki punktowej, która znajduje się w punkcie $\bar{r} = 0$



$$\bar{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{F}}{8\pi\eta r} \cdot (\bar{\bar{I}} + \hat{r}\hat{r}) \tag{9}$$

gdzie:
wersor $\hat{r}$ to wektor jednostkowy wzdłuż $\bar{r}$,
$\hat{r} = \frac{\bar{r}}{r}$ oraz $r =\mid \bar{r} \mid$,

v_z=



$$\begin{cases} \bar{F} \cdot \hat{r} = F cos\Theta, \\ \hat{r} = (sin\Theta, 0, cos\Theta) \end{cases} \tag{10}$$

Załóżmy, że $\bar{r} = (x, 0, z)$ i $\bar{F} = (0, 0, F)$

$$\begin{cases} \bar{v} = \frac{F}{8\pi\eta r}[(0,0,1) + cos\Theta(sin\Theta, 0, cos\Theta) \\ \bar{v} = \frac{F}{8\pi\eta r}[sin\Theta cos\Theta, 0, 1 + cos^2\Theta] \end{cases} \tag{11}$$

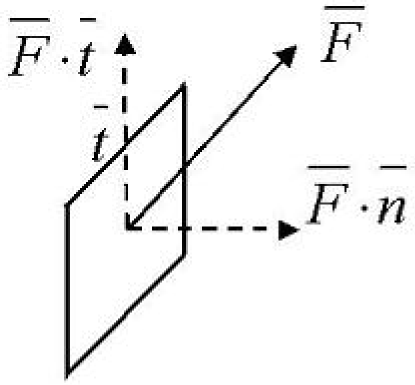
Co dalej??

1. Coś powiedzieć na temat wyprowadzenia wzoru na pole prędkośći cząstki punktowej

$$\eta\nabla^2 v - \nabla p = -\bar{F}\delta^3(\bar{r}) \tag{12}$$

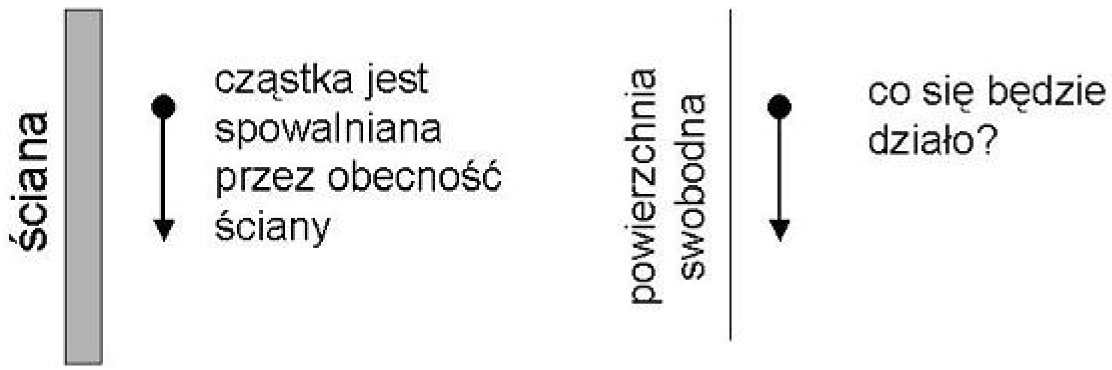
   wyprowadzenie = rozwiązanie powyższego równania (czyli podanie tensorów Greena dla tego równania)

2. Jak ograniczenie płynu wpływa na pole prędkości i ciśnienie płynu (tensory Greena) wywołanego obecnościa cząstki punktowej
   - powierzchnia swobodna płaska:
   płyny $\frac{\eta=0}{\eta\neq0}$ np.: $\frac{powietrze}{woda}$



gdzie:
$\bar{t} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n}$ - napięcie styczne,
$\bar{F} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n}$ - napięciowa siła oporu hydrodynamicznego na jednostkę powierzchni,
$\bar{F} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} \mid_{na.powswobod.} = 0$ - siła styczna =0,
$\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$ - prędkość normalna.

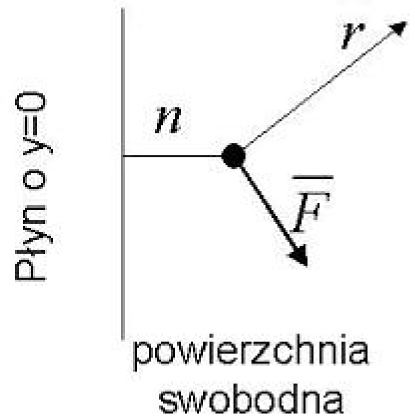
Porównania:



Przypadek drugi jest bardziej prawdopodobny, bo nie musi ciągnąc masy wody po prawej stronie.

Film z płytki Homisy et. al. Multimedia fluid Flow nr 178 ilustrujący warunki brzegowe na powierzchni płynów o $\eta \neq 0$ i $y = 0$.

Pytanie domowe - czy żółty czy biały płyn ma wiekszą lepkość??

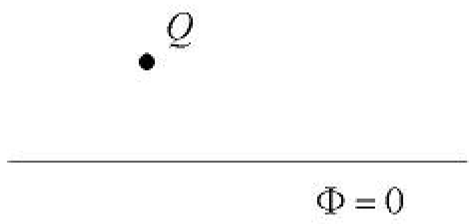


Szukamy $\bar{v}(\bar{r}, h)$

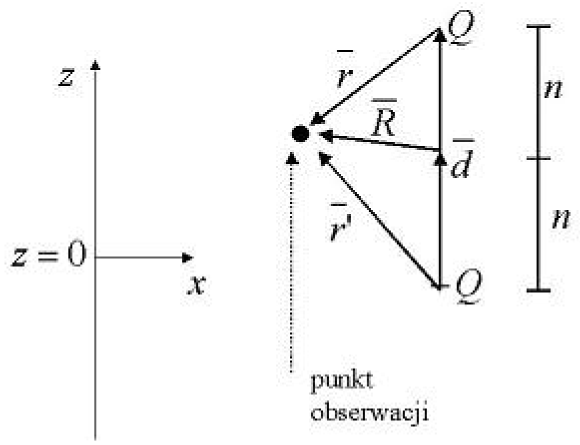
Równanie liniowe $\rightarrow$ metoda obrazów?

Przykład metody obrazów:

Ładunek punktowy nad płaszczyzną przewodzącą.



Rozwiązanie metodą obrazów



$$\Phi(\bar{r}, h) = \frac{\bar{Q}}{4\pi\epsilon r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \tag{13}$$