www.ippt.gov.pl/~mekiel/2008/PF2008.pdf

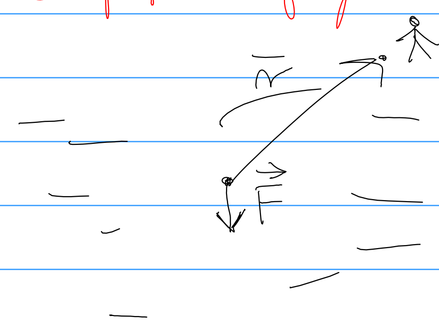
10.11.2008

Wykład 3.

Plan

1. Wyprowadzenie pola prędkości wygenerowanego przez siłę punktową w ∞ płynie
2. Dyskusja rozwiązania z punktu 1
   + zastanowić się w domu
3. Metoda obrazów: co się stanie z polem prędkości siły punktowej gdy dołożymy powierzchnię swobodną?
   + jakie są linie prądu pola prędkości płynu?

(1). Równania Stokesa



v, p

$$\eta \nabla^2 \bar{v} - \nabla p = -\bar{F}\,\delta(\bar{r})$$

$\bar{F}$ znajduje się w $\bar{r} = 0$

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0$$

[Rozwiązanie dla $\bar{v} = \frac{\bar{F}}{8\pi\eta r} \cdot \left(\bar{\bar{I}} + \hat{r}\hat{r}\right)$ $\qquad \hat{r} = \frac{\bar{r}}{r}$

Propozycje jak to rozwiązać?

1) Transformata Fouriera
2) Najpierw coś prostszego (może też bardziej znanego)

$$\nabla^2 \phi = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\,\delta(\bar{r})$$

ładunek elektryczny punktowy w $\bar{r} = 0$

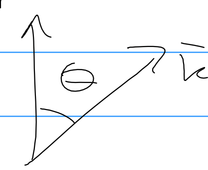
Transformata Fouriera.

$$\tilde{\phi}(\bar{k}) = \int d^3\bar{r}\, \phi(\bar{r})\, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

$$-k^2 \tilde{\phi} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \tilde{\phi} = \frac{Q}{\varepsilon_0 k^2} \overset{\text{ozn}}{=} \frac{G}{k^2}$$

Odwrotna transformata Fouriera

$$\phi(\bar r) = \int d^3\bar k\, \tilde\phi(\bar k)\, e^{i\bar k\cdot\bar r}\, \frac{1}{(2\pi)^3}$$



$$= \frac{G}{(2\pi)^3}\, 2\pi \int_0^\infty dk\, k^2 \int_{-1}^{1} dx\, \frac{e^{i\bar k\cdot\bar r}}{k^2} =$$

$x = \cos\theta$

$\bar k\cdot\bar r = kr\cos\theta = krx$

$$= \frac{G}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\, \underbrace{\int_{-1}^{1} dx\, e^{irkx}}_{\frac{e^{ikrx}}{irk}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sin kr}{rk}} = \frac{2G}{(2\pi)^2 r}\int_0^\infty d(kr)\,\frac{\sin kr}{rk} =$$

$$= \frac{2G}{(2\pi)^2 r}\underbrace{\int_0^\infty dy\, \frac{\sin y}{y}}_{\pi/2} = \frac{G}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{\phi(\bar r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{4\pi r}$$

Wracamy do r-ń Stokesa

$$\nabla\cdot\left(\eta\nabla^2\bar v - \nabla p = -\bar F\,\delta^3(\bar r)\right)$$

$$\nabla^2 p = \bar F\cdot\bar\nabla\,\delta^3(\bar r)$$

Dygresja

$\eta\nabla^2\bar v - \nabla p = 0 \Rightarrow \nabla^2 p = 0$

Porównaj z r-niem Laplace'a dla potencjału elektrycznego w nieobecności ładunków

$$\nabla^2\phi = 0$$

Ale równanie na ciśnienie od siły punktowej $\neq$ równania na potencjał od ładunku punktowego

Rozwiązanie:

transformata Fouriera

$$-k^2\tilde{p} = i\bar{F}\cdot\bar{k} \Rightarrow \tilde{p} = -\frac{i\bar{k}\cdot\bar{F}}{k^2} = -\bar{F}\cdot i\bar{k}\,\frac{1}{k^2} \quad (*)$$

$$\boxed{p = -\bar{F}\cdot\bar{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)} = \boxed{\frac{\bar{F}\cdot\bar{r}}{4\pi r^3} = p}$$

ciśnienie pojawia wywołane siłą punktową

$$\bar{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\frac{1}{r} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)}_{-\frac{1}{r^2}}\cdot\underbrace{\frac{d\bar{r}}{dr}}_{\frac{\bar{r}}{r}} = -\frac{\bar{r}}{r^3}$$

$\bar{v} = ?$ Znów transformata Fouriera

$$-\eta k^2\tilde{\bar{v}} - i\bar{k}\tilde{p} = -\bar{F} \qquad z\ (*):$$

$$-\eta k^2\tilde{\bar{v}} + i\bar{k}\,\frac{i\bar{k}\cdot\bar{F}}{k^2} = -\bar{F}$$

$$\eta\tilde{\bar{v}} = \left[\frac{\bar{F}}{k^2} - \bar{k}\,\frac{\bar{k}\cdot\bar{F}}{k^4}\right]$$

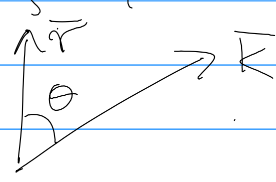
$$\tilde{\bar{v}} = \tilde{\bar{v}}_1 + \tilde{\bar{v}}_2$$

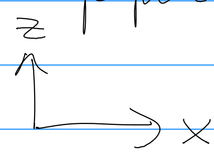
$$\boxed{\bar{v}_1 = \frac{\bar{F}}{4\pi\eta r}}$$

$\bar{v}_2 = ?$

1° Czy możemy zastosować ten trik co poprzednio $i\bar{k} \to \nabla$?
Nie

2° Mamy podobne wyrażenie $\sim\frac{1}{k^2}$ ale są $\neq$ niż poprzednio czynniki lepsze





k, φ, θ $\left.\begin{matrix}\text{pł. } zx \equiv \\ \text{pł. } \bar{r}, \bar{k}\end{matrix}\right\}$

F_x, F_y, F_z + symetria

Symetrie:

$$\bar{k} \quad \bar{k}\cdot\bar{F} = \left(\bar{k}_{\parallel} + \bar{k}_{\perp}\right)\left(\bar{k}_{\parallel}\cdot\bar{F} + \bar{k}_{\perp}\cdot\bar{F}\right)$$

$\parallel$ i $\perp$ do $\bar{r}$

$$\bar{k} = k(\underbrace{\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi\sin\theta}_{\perp},\ \underbrace{\cos\theta}_{\parallel})$$

Po wycałkowaniu zostaje tylko

$$\bar{k}_{\parallel} = \frac{\bar{r}\,\bar{r}\cdot\bar{k}}{r^2}$$

$$\underbrace{\bar{k}_{\parallel}\ \bar{k}_{\parallel}\cdot\bar{F}}\ +\ \bar{k}_{\perp}\ \bar{k}_{\perp}\cdot\bar{F}$$

$$\underbrace{\bar{r}\,\bar{r}\cdot\bar{F}}\ \underbrace{\left(\frac{\bar{r}\cdot\bar{k}}{r^2}\right)^2}_{w}$$

to co w Oseenie ale jaki współczynnik?

$$w = \cos^2\theta\,\frac{k^2}{r^2}$$

$$\frac{\bar{r}\,\bar{r}\cdot\bar{F}}{r^2}\,k^2\cos^2\theta$$

II człon $\Rightarrow$ trzeba całkować $\sin^2\theta(\sin^2\varphi,\ \cos^2\varphi)$

Pełne rozwiązanie:

$$C_1\frac{\delta_{ij}}{8\pi r} + C_2\frac{r_i r_j}{8\pi r^3}$$

$C_1, C_2 = ?$ Kim str. 33-34.

Kim Karrila Microhydrodynamics (p. Ania).

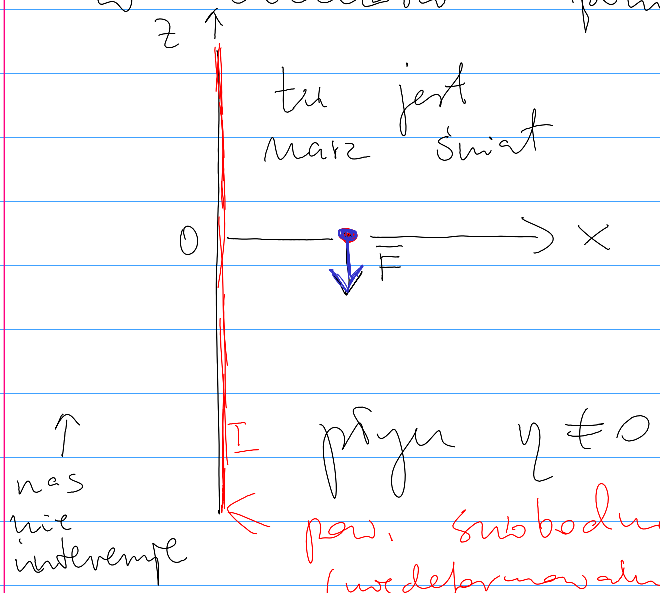
2. Dyskusja pola prędkości wokół siły punktowej – rysunek z poprzednich zajęć.

Rys. 1 cząstka – punkt

Które linie prądu odpowiadają sferze?

Odp. te ciemne, bo linie prądu na pow. sfery powinny mieć styczną równoległą do siły działającej na kulkę.

3. Metoda obrazów – pole prędkości wygenerowane przez wypływ punktowy w obecności powierzchni swobodnej.



przyjmujemy $\eta \neq 0$

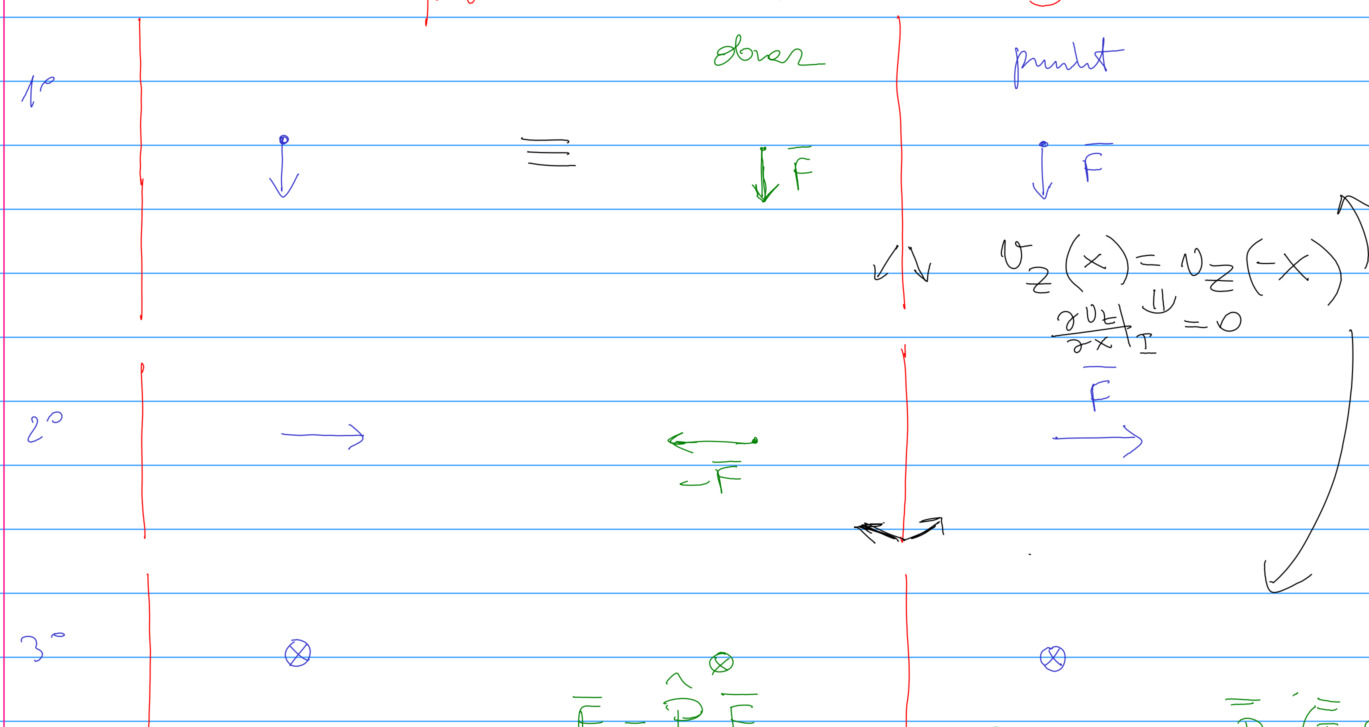
pow. swobodna (niezdeformowana)

A) $v_x = 0$

B) $\sigma_{xz} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\Big|_I = 0$

$\bar t \cdot \bar\sigma \cdot \bar n = 0$

C) $\sigma_{xy} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Big|_I = 0$



$v_z(x) = v_z(-x)$

$\Downarrow$

$\frac{\partial v_z}{\partial x}\Big|_I = 0$

$\bar F_0 = \hat P \bar F$ odbicie w pł. $x = 0$ $\qquad \hat P = (\bar{\bar I} - 2\hat x \hat x)$

3° ≡ 1°, nie rozwiązujemy dalej 3°

Rozwiązanie: $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$

Sprawdzamy w. brzegowy na powierzchni

A) $v_x = 0$ z symetrii odbicia w płaszczyźnie $x=0$

OK.

B, C) $v_x = 0$ na powierzchni niezależnie od y oraz z byleby $x=0$

$$\left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_I = 0 \qquad \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_I = 0$$

$$\left.\frac{\partial v_z}{\partial x}\right|_I = 0 \qquad \left.\frac{\partial v_y}{\partial x}\right|_I = 0$$

1° bo 3°

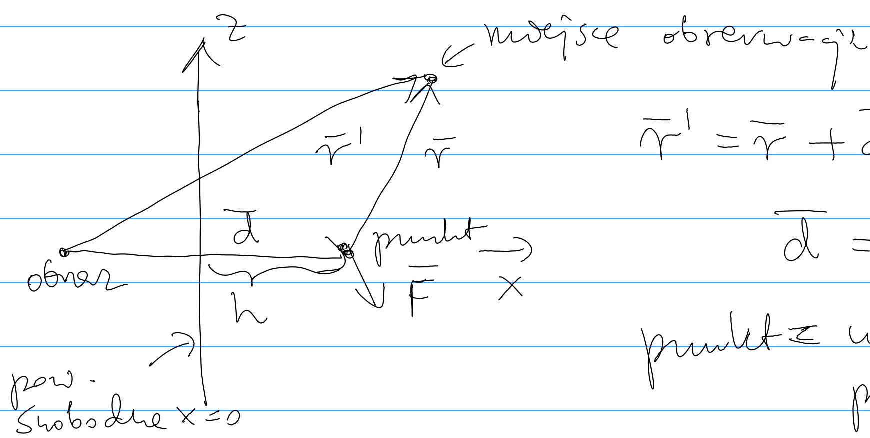
3° takie samo jak 1°

Czyli B, C) są spełnione

Wzory:

$$\bar{v} = \frac{1}{8\pi\eta}\left[\frac{\left(\bar{I} + \frac{\bar{r}\bar{r}}{r^2}\right)}{r}\cdot\bar{F} + \frac{\left(\bar{I} + \frac{\bar{r}'\bar{r}'}{r'^2}\right)}{r'}\cdot\hat{P}\bar{F}\right]$$

$x>0$



$\bar{r}' = \bar{r} + \bar{d}$

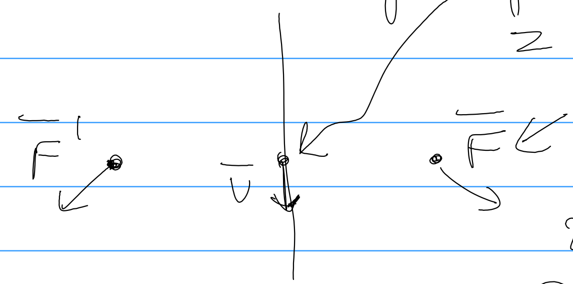
$\bar{d} = (2h, 0, 0)$

punkt z narz. cząstka punktowa

Zadanie domowe 1: zapisać prędkość płynu w postaci jawnej

Zadanie domowe 2: wyrysować to pole prędkości

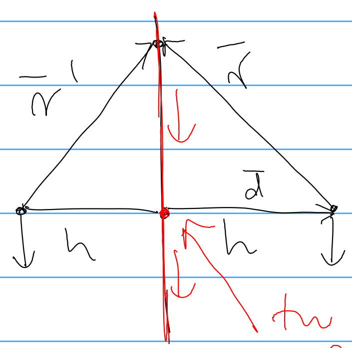
Przykład: jak szybko rusza się pow. swobodna w dipolu punktowym (w porównaniu z nieograniczonym płynem)?



zadane

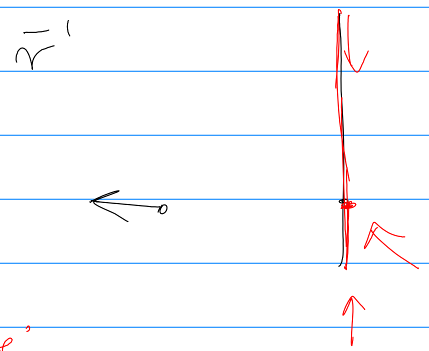
czy 2x szybciej rusza (niezależnie od wer. $\bar F$)

Na pow. swobodnej:



tu rusza się 2x szybciej niż w ∞ płynie

1°



tu się nie rusza

$v = 0$

2°

$\bar v$

$v_x(x) = -v_x(-x)$

$$\operatorname{div} \bar v = \frac{\partial v_x}{\partial x} \neq 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \neq 0$$

W pkt. $(x,y,z) = (0,0,0)$ ile wynosi $\bar v$ dla przypadków 1°, 2°