

## Wykład 3

### Plan:

1. Wyprowadzenie pola prędkości wygenerowanego przez siłę punktową w nieskończonym płynie
2. Dyskusja rozważania z punktu 1
3. Metoda obrazów: co się stanie z polem prędkości siły punktowej, gdy dołożymy powierzchnię swobodną?

### Równania Stokesa

### Równania Naviera-Stokesa

$\bar{v}(\bar{r}, t) = \bar{v}$  - prędkość płynu

$p(\bar{r}, t) = p$  - ciśnienie płynu

$\rho$  - gęstość płynu

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$$

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \eta \left( \frac{dv_i}{dr_j} + \frac{dv_j}{dr_i} \right) - \delta_{ij} p \quad (2)$$

### Prawo podobieństwa

Dobieramy jednostki położenia  $L$  i prędkości  $V$

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} \quad (3)$$

gdzie:

$\frac{\eta}{\rho} = \nu$  - lepkość kinetyczna,

Bezwymiarowa prędkość  $u = \frac{v}{V}$ ,  $\bar{x} = \frac{\bar{r}}{L}$ ,  $\tau = \frac{tV}{L}$

$$Re \frac{D\bar{u}}{Dz} = \frac{d}{d\bar{x}} \cdot \bar{\sigma} \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left( \frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right) - \delta_{ij} \tilde{p} \quad (5)$$

gdzie:

$p$  - ciśnienie bezwymiarowe,

Zadanie domowe: wyrazić  $p$  w funkcji  $p$ ,

$Re$  - liczba Reynoldsa,

to samo równanie dla wszystkich takich układów, które mają tę samą liczbę Reynoldsa (Film 535)

Zagadka: (film 5.35 Homsy Multimedia Fluid Flow) – z jaką prędkością  $V$  powinien poruszać się samochód o długości 6ft, aby modelować ruch drugiego samochodu (18ft długości) jadącego

z prędkością 60km/h?

W wodnym mikroświecie:  $Re \ll 1$

Równania Naviera-Stokesa redukują się do równań Stokesa

$$\eta \nabla^2 \bar{v} - \bar{\nabla} p = 0 \quad (6)$$

gdzie:

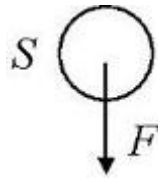
$p$  - zawarta siła grawitacji (ciśnienie zmodyfikowane),

Jak rozwiązać równania Stokesa?!

np. dla jednej cząstki, która porusza się pod wpływem siły  $\bar{F}$  jakie jest pole prędkości płynu wygenerowane przez ten ruch?

Równanie (6) + warunki brzegowe

1. w nieskończoności (tam  $\bar{v}(\bar{r}) = 0$ )
2. Warunki brzegowe przylegania (stick b.c, no-slip b.c)  
prędkość płynu przy powierzchni kulki jest równa lokalnie prędkości kulki



$$\bar{v}(\bar{r}) |_{\bar{r} \in S} = \bar{U} + \bar{\Omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_o) \quad (7)$$

gdzie:

$S$  - powierzchnia kulki,

$\bar{U}$  - prędkość kulki translacyjna,

$\bar{\Omega}$  - prędkość kulki rotacyjna,

$\bar{r}_o$  - położenie środka kulki,

Kulka opadająca grawitacyjnie w nieskończonym płynie nie może się obracać (wynika to z symetrii układu  $\bar{\Omega} = \bar{0}$ )

Linie prądu płynu wokół kulki oraz ich porównanie z liniami prądu wokół punktu – wykresy Piotrka Korczyka kulka-punkt.pdf oraz punkt.pdf. Dlaczego symetria góra dół?

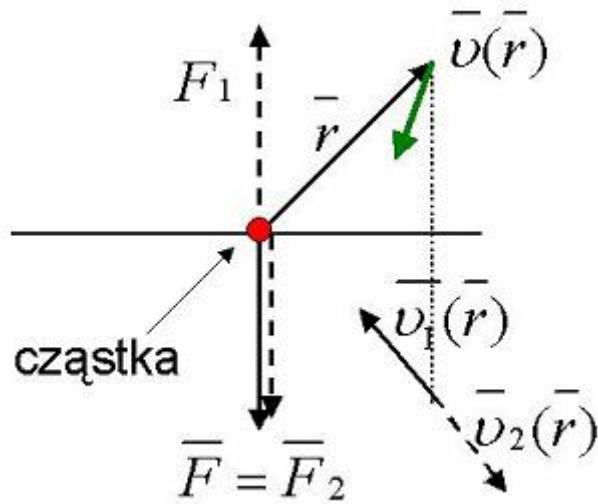
Odwracalność w czasie równań Stokesa:

$\bar{v} \rightarrow -\bar{v}, p \rightarrow -p$  - niezmiennicze względem takiej transformacji

Dygresja:

Ciśnienie w równaniach Stokesa pełni rolę podrzędną, ponieważ mamy dodatkowy związek na prędkość w postaci równania nieściśliwości  $\nabla \cdot \bar{U} = 0$ . Wystarczy zadać warunki brzegowe na prędkość, a ciśnienie już wynika z równań.

Superpozycja 1) odbicia w płaszczyźnie zawierającej cząstkę oraz 2) odwrócenia czasu:



gdzie:

$\bar{F}$  - grawitacja,

$F_1 \rightarrow F_2$  - jest ...wetrywalne,

wniosek: pole prędkości ma symetrię jak na rysunku PK.

Mamy równowagę sił działających na kulkę:

-co równoważy grawitację? siła oporu płynu

-jak obliczyć tę siłę?

gdzie:

$\bar{\sigma}$  - tensor naprężeń,

$\bar{n} \cdot \bar{\sigma}$  jest to siła działająca na powierzchnię jednostkową. Siła ta związana jest z naprężeniami lepkości. Siła działająca na powierzchnię kulki jest to całkowita siła oporu, jaką płyn stawia kulce!

$$\bar{F}_H = \int dS \bar{n} \cdot \bar{\sigma} = -\bar{F} \quad (8)$$

Z warunków:  $\bar{v} \rightarrow -\bar{v}$  oraz  $p \rightarrow -p$  wynika zależność  $F \rightarrow -F$ . Siła hydrodynamiczna zmienia

znak przy transformacji odwrócenia czasu.

**Pole prędkości płynu wokół cząstki punktowej, która znajduje się w punkcie  $\vec{r} = 0$**

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{8\pi\eta r} \cdot (\vec{I} + \hat{r}\hat{r}) \quad (9)$$

gdzie:

wersor  $\hat{r}$  to wektor jednostkowy wzdłuż  $\vec{r}$ ,

$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$  oraz  $r = |\vec{r}|$ ,

$v_z =$

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot \hat{r} = F \cos\Theta, \\ \hat{r} = (\sin\Theta, 0, \cos\Theta) \end{cases} \quad (10)$$

Założmy, że  $\vec{r} = (x, 0, z)$  i  $\vec{F} = (0, 0, F)$

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{F}{8\pi\eta r} [(0, 0, 1) + \cos\Theta(\sin\Theta, 0, \cos\Theta)] \\ \vec{v} = \frac{F}{8\pi\eta r} [\sin\Theta \cos\Theta, 0, 1 + \cos^2\Theta] \end{cases} \quad (11)$$

Co dalej??

1. Coś powiedzieć na temat wyprowadzenia wzoru na pole prędkości cząstki punktowej

$$\eta \nabla^2 v - \nabla p = -\vec{F} \delta^3(\vec{r}) \quad (12)$$

wyprowadzenie = rozwiązanie powyższego równania (czyli podanie tensorów Greena dla tego równania)

2. Jak ograniczenie płynu wpływa na pole prędkości i ciśnienie płynu (tensory Greena) wywołanego obecnością cząstki punktowej

- powierzchnia swobodna płaska:

płyny  $\frac{\eta=0}{\eta \neq 0}$  np.:  $\frac{\text{powietrze}}{\text{woda}}$

gdzie:

$\vec{t} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$  - napięcie styczne,

$\vec{F} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$  - napięciowa siła oporu hydrodynamicznego na jednostkę powierzchni,

$\vec{F} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} |_{na.powswobod.} = 0$  - siła styczna = 0,

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  - prędkość normalna.

Porównania:

Przypadek drugi jest bardziej prawdopodobny, bo nie musi ciągnąć masy wody po prawej stronie.

Film z płytki Homisy et. al. Multimedia fluid Flow nr 178 ilustrujący warunki brzegowe na powierzchni płynów o  $\eta \neq 0$  i  $y = 0$ .

Pytanie domowe - czy żółty czy biały płyn ma większą lepkość??

Szukamy  $\bar{v}(\bar{r}, h)$

Równanie liniowe  $\rightarrow$  metoda obrazów?

Przykład metody obrazów:

Ładunek punktowy nad płaszczyzną przewodzącą.

Rozwiązanie metodą obrazów

$$\Phi(\bar{r}, h) = \frac{\bar{Q}}{4\pi\epsilon r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (13)$$