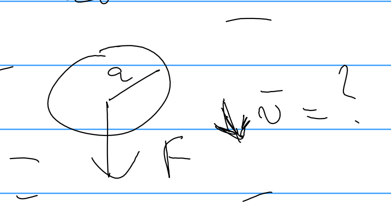
Wykład 4 17.11.2009

1. Pole prędkości od siły punktowej w ∞ płynie
   - inny sposób wyprowadzenia + dyskusja
   - wykresy ilustrujące pole prędkości + ciśnienie
2. Komentarz na temat rozwiązania dla siły punktowej w obecności płaskiej powierzchni swobodnej
3. Zmierzające w kierunku znalezienia rozw. fundamentalnego w obecności płaskiej sztywnej ściany coś prostego;
4. Jak wygląda pole prędkości wokół sztywnej sfery + wyprowadzenie wzoru Stokesa ($\bar{U} = \bar{F}/(6\pi\eta a)$)



1. Pan Maciek

$$\begin{cases} -\nabla p(\underline{r}) + \mu \nabla^2 \underline{v}(\underline{r}) = -\underline{F}\,\delta(\underline{r}) & (1) \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0 & (2) \end{cases}$$

$\rightarrow$ div (1)

$$-\nabla^2 p(\underline{r}) = -\nabla \cdot \underline{F}\,\delta(\underline{r})$$

$$\hat{p} = -i\,\frac{\underline{k}\cdot\underline{F}}{k^2}$$

$$\underline{k}\left(\frac{\underline{k}\cdot\underline{F}}{k^2}\right) + \mu k^2 \hat{\underline{v}}(\underline{k}) = \underline{F}$$

$$\hat{v}(\underline{k}) = \frac{1}{\mu k^2}\left[\underline{F} - \underline{k}\left(\frac{\underline{k}\cdot\underline{F}}{k^2}\right)\right]$$

Rozwiązanie fundamentalne r. Laplace'a

3D
$$\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = -\delta(\underline{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\underline{k}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\underline{k}\, \frac{\underline{k}}{k^2} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}} d\underline{k}\, \frac{1}{k^2} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$\cdot\underline{F}$

$$p(\underline{r}) = -\underline{F}\cdot\nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = \frac{\underline{F}\cdot\underline{r}}{4\pi r^3}$$

Rozwiązanie fundamentalne równ. biharmonicznego

$$-\nabla^4\left(\frac{r}{8\pi}\right) = \delta(\underline{r})$$

szukamy ϕ:
$-\nabla^4\phi = \delta(r)$
$\tilde{\phi} = -\frac{1}{k^4}$

$$\nabla^4\left(\frac{r}{8\pi}\right) = -\delta(\underline{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\underline{k}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\left(\frac{r}{8\pi}\right) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\underline{k}\,\frac{1}{k^4}\,e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} \equiv \phi$$

$$\nabla\nabla\left(\frac{r}{8\pi}\right) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\underline{k}\,\frac{\underline{k}\,\underline{k}}{k^4}\,e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\underline{k}\,\underline{k} = \underline{k}\otimes\underline{k} \rightsquigarrow (\underline{k}\,\underline{k})_{ij} = k_i k_j$$

$$\nabla\nabla\left(\frac{r}{8\pi}\right) = \nabla\otimes\nabla\left(\frac{r}{8\pi}\right)$$

$$\underline{k}\,\underline{k}\cdot\underline{F} = (\underline{F}\cdot\underline{k})\,\underline{k}$$

$$\underline{u}(\underline{r}) = \frac{\underline{F}}{4\pi\mu r} - \frac{1}{8\pi^3\mu}\int_{\mathbb{R}^3} d\underline{k}\,\frac{e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}}{k^2}\,\underline{k}\left(\frac{\underline{k}\cdot\underline{F}}{k^2}\right) =$$

$$= \frac{\underline{F}}{4\pi\mu r} - \frac{\underline{F}}{\mu}\cdot\left[\nabla\otimes\nabla\left(\frac{r}{8\pi}\right)\right]$$

$$\nabla r = \frac{\underline{r}}{r} \qquad \nabla\otimes\underline{r} = \mathbb{1}$$

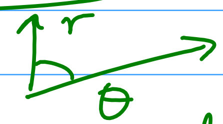
$$\frac{1}{8\pi}\nabla\otimes(\nabla r) = \frac{1}{8\pi}\nabla\otimes\left(\frac{\underline{r}}{r}\right) = -\frac{1}{8\pi}\frac{\underline{r}\,\underline{r}}{r^3} + \frac{\mathbb{1}}{8\pi r}$$

$$\underline{u}(\underline{r}) = \frac{\underline{F}}{8\pi\mu r}\left(\mathbb{1} + \frac{\underline{r}\,\underline{r}}{r^2}\right)$$

Wyprowadzenie r. fundamentalnego równania biharmonicznego $-\nabla^4 \phi = \delta(\bar{r})$

$$\boxed{\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d\bar{k}}{k^4}\, e^{i\bar{k}\bar{r}} = -\frac{r}{8\pi}} = \phi$$

wsp. sferyczne



$\sin\theta \, d\theta = dx$

$$L = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dk}{k^2}\underbrace{\int_{-1}^{1} dx\, e^{ikrx}}_{\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{ikr}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 i r}\int_0^\infty \frac{dk}{k^3}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 i r}\left[\int_0^\infty \frac{dk}{k^3}e^{ikr} - \int_0^{-\infty}\frac{-dk'}{-k'^3}e^{ik'r}\right]$$

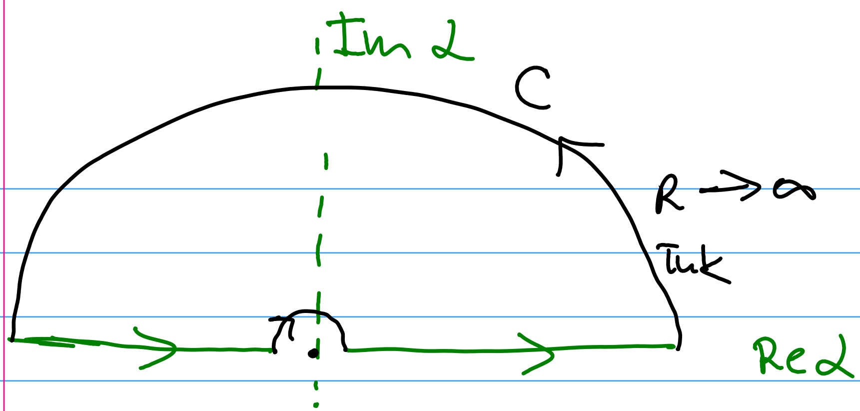
$-k = k'$
$dk = -dk'$
$k^3 = -k'^3$

$$= \frac{r^2}{(2\pi)^2 i r} P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk\cdot r}{r^3 k^3}e^{ikr} = \frac{r}{(2\pi)^2 i} P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^3}e^{i\alpha}$$

$\frac{r}{4\pi^2 i}(i\pi)$

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^3}e^{i\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right]\underbrace{\frac{d\alpha}{\alpha^3}e^{i\alpha}}_{d\alpha\, f(\alpha)}$$

α - zespolone



$$\int_C f(\alpha)\,d\alpha = 0$$

$$0=\int_C f\,d\alpha = \int_{Тик} f\,d\alpha + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) f(\alpha)\,d\alpha \;+\; \underbrace{\text{сабле по малом облуку полупречника } \varepsilon}_{-\frac{1}{2}\,2\pi i\,\mathrm{Res}\, f(\alpha)\big|_{\alpha=0}}$$

$R\to\infty$: $\int_{Тик} \to 0$

Об несуштне, $\varepsilon\to 0$: мале главне сабле

$$\mathrm{Res}\, f(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \mathrm{Res}\,\frac{e^{i\alpha}}{\alpha^3}\Big|_{\alpha=0}.$$

$$\mathrm{Res}\, f(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[f(\alpha)\,\alpha^3\right]\Big|_{\alpha=0} = -1/2$$

$$\downarrow$$

$$+\,i\pi/2$$

$$=$$

мале сабле

$$\boxed{L = -\frac{r}{8\pi}}$$

$$\mathrm{Res}\, f(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(f(\alpha)\,\alpha^3\right)\Big|_{\alpha=0} \Big/ 2$$

$f(\alpha)\,\alpha^3 = \mathrm{const}.$

2. Interpretacja graficzna rozwiązania

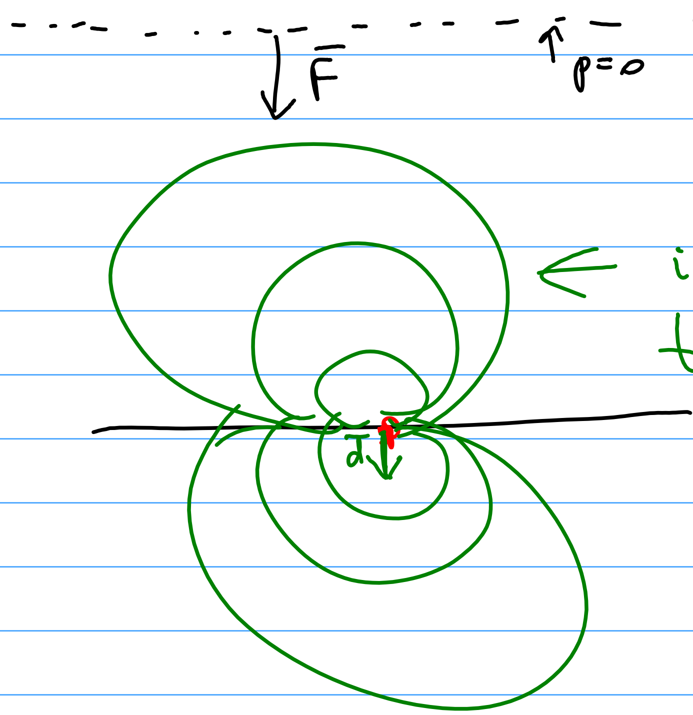
Wykresy – pola prędkości AM + MEJ
– linii prądu AM + MEJ
– pole kolorów amplitudy prędkości – KK

Ciśnienie ?

$$\boxed{p = \frac{\bar{r} \cdot \bar{F}}{r^3}}$$ + dowolna stała p_0

– izolinie (izobary) MEJ
– mapa kolorów ?

Przewidywanie:



$0 = \bar{r} \cdot \bar{F} \Rightarrow p = 0$

← izobary (ML) tak jak potencjał elektrostatyczny od dipola elektrycznego czyli

$$\phi = \frac{\bar{d} \cdot \bar{r}}{r^3}$$

Powierzchnia swobodna I

Rów. fundamentalne r. Stok.

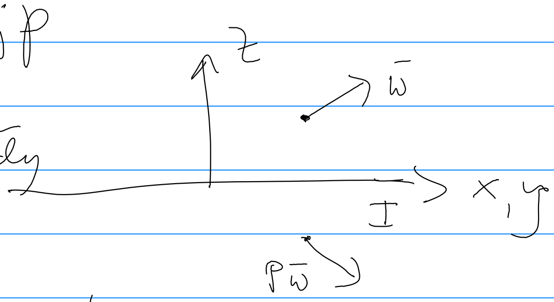
$$\bar v \cdot \bar n \Big|_I = 0 \qquad \bar t \cdot \bar{\bar\sigma} \cdot \bar n \Big|_I = 0$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right) - \delta_{ij} p$$

Symetria:

$$\hat{\bar{\bar P}} = \left(\bar{\bar I} - 2\hat z \hat z\right)$$

ten człon wypada gdy $\bar t \cdot \bar{\bar\sigma} \cdot \bar n$



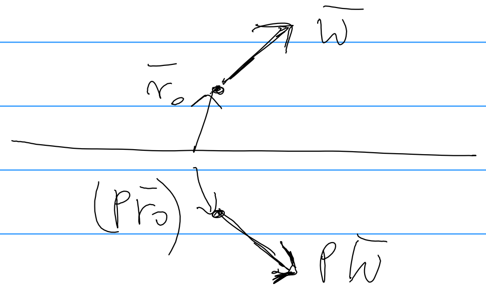
$\bar v$ – czy jest symetryczne/antysymetryczne względem $\hat P$?

Rozważmy:

$$\bar v(\bar r) = \frac{1}{2}\left(\bar v(\bar r) - (P\bar v)(\bar r)\right) + \frac{1}{2}\left(\bar v(\bar r) + (P\bar v)(\bar r)\right)$$

v – symetryczne wzgl. P

$(P\bar v)(\bar r)$

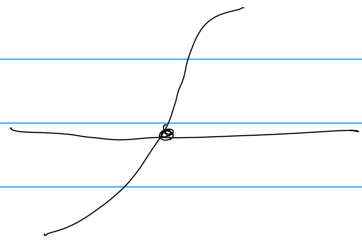


$$\bar v_\infty(\bar r) + \underbrace{(P\bar v_\infty)(\bar r)}$$

$$= \left(T(\bar r - \bar r_0)\cdot \bar F + T(\bar r - \bar P\bar r_0)\cdot(P\bar F)\right)$$

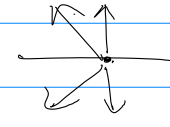
↑ tensor Oseena.

P.



antysymetryczne fcje spełniają równanie z w. brzegowe ⇒ to z jednoznaczności

$\bar t \cdot \bar{\bar\sigma} \cdot \bar n$ antysymetryczny względem P



Symetrie względem pewnego przekształcenia pozwalają znaleźć łatwo rozwiązanie

---

Dygresja

Szukające rozw. fundamentalnego:

$$\eta \nabla^2 \bar{v} - \nabla p = -\delta(\bar{r})\bar{F}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v}$$

nieskończony przyp. $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{|\bar{v}(\bar{r})| \xrightarrow[|\bar{r}| \to \infty]{} 0}$$

bez tego założenia nie byłoby tw. o jednoznaczności rozwiązań

Np. niech

ϕ spełnia r. Laplace'a $\nabla^2\phi = 0$

$\bar{v} = \nabla\phi$, $p = \text{const}$ spełnia r. Stokesa

$$\nabla \cdot \bar{v} = \nabla^2\phi = 0$$

$$\eta \nabla^2 \bar{v} - \nabla p = \eta \nabla \underbrace{(\nabla^2 \phi)}_{=0} - \underbrace{\nabla p}_{} = 0$$

$\nabla p = 0$ ($p = \text{const}$) $\Rightarrow$ mamy rozwiązanie

Czyli jeśli mamy rozw. fundamentalne:

$$\eta \nabla^2 \bar{v}_\infty - \nabla p_\infty = -\bar{F}\delta(\bar{r})$$

$$\boxed{\eta\nabla^2(\bar{v}_\infty + \underbrace{\bar{v}}_{\nabla\phi}) - \nabla(p_\infty + p) = -\bar{F}\delta(\bar{r})}$$

Jeżeli $v \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ to $\bar{v} = 0$,

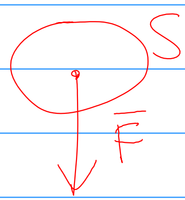
i mamy jednoznaczność rozwiązania

Trywialne rozwiązanie:

$p = \text{const.}$ $\quad \underbrace{\nabla\times(\bar{r}\phi)}_{\bar{r}\times\nabla\phi}$ $\quad \nabla^2\phi = 0$.

Zad. domowe: Sprawdzić, że) jest rozw. r. Stokesa

Pole prędkości wokół kuli która porusza się pod wpływem stałej siły



$\downarrow \bar{v} = ?$ $\qquad \bar{U} = ?$

$\uparrow$ płyn $\qquad \uparrow$ kula

$$v \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \qquad \bar{v}\Big|_S = \bar{U}$$

Dla punktu:

$$\bar{v} = \underbrace{\frac{(\bar{\bar{I}} + \hat{r}\hat{r})}{8\pi\eta r} \cdot \bar{F}}_{v_0(\bar{r})} + v_1(\bar{r})$$

$$\bar{v}\Big|_S = \bar{U} \parallel \bar{F} = \alpha \bar{F}$$

$$\bar{v}\Big|_S = \underbrace{\frac{\bar{F}}{8\pi\eta a}}_{\text{to jest dobry kawałek}} + \underbrace{\frac{\bar{F}\cdot\hat{r}\,\hat{r}}{8\pi\eta a}} + \bar{v}_1\Big|_{\bar{r}\in S}^{r=a}$$

$$\bar{v}_1\Big|_S = \beta\bar{F} - \frac{\bar{F}\cdot\hat{r}\,\hat{r}}{8\pi\eta a}$$

$\bar{v}_1 \xrightarrow[r\to\infty]{}$ zanika szybciej niż $\bar{v}_0$

$\bar{v}_1 \sim \frac{1}{r^2}$ albo $\frac{1}{r^3}$

$q = \frac{\bar{F}\cdot\bar{r}}{r^3}$ $\quad p = \frac{\bar{F}\cdot\bar{r}}{4\pi r^3}$ $\quad \left.\begin{array}{l}\bar{v}_1 = \gamma\bar{\nabla}p \\ p_1 = 0\end{array}\right]$ spełnia v, Stokesa bez źródeł

$$\bar{v}_1 = \gamma\bar{\nabla}q = \gamma\frac{\bar{F}}{r^3} - \gamma\frac{3\bar{F}\cdot\bar{r}}{r^5}\,\bar{r} = \frac{\bar{F}}{r^3} - \underbrace{\frac{3(\bar{F}\cdot\hat{r})\,\hat{r}}{r^3}}_{r=a}$$

$$\bar{v}_1 = \gamma\nabla\bar{q} = \gamma\nabla p\cdot 4\pi \qquad \Downarrow \qquad \frac{3(\bar{F}\cdot\hat{r})\,\hat{r}}{a^3}$$

$$\bar v\Big|_S = \frac{\bar F}{8\pi\eta a} + \underbrace{\frac{(\bar F\cdot\hat r)\,\hat r}{8\pi\eta a}} + \gamma\frac{\bar F}{a^3} - \underbrace{\gamma\frac{3(\bar F\cdot\hat r)\,\hat r}{a^3}} = 0$$

$$\frac{1}{8\pi\eta a} = \gamma\,\frac{3}{a^3} \Rightarrow \gamma = \frac{a^2}{3\cdot 8\pi\eta} \qquad \gamma\cdot 4\pi = \frac{a^2}{6\eta}$$

$$\bar v\Big|_S = \frac{\bar F}{8\pi\eta a} + \frac{\bar F\,a^2}{a^3\cdot 3\cdot 8\pi\eta} = \frac{\bar F}{8\pi\eta a}\left(1+\frac{1}{3}\right) =$$

$$\frac{\bar F}{\pi\eta a}\,\underbrace{\frac{4}{3\cdot 8}}_{\frac{1}{6}} = \boxed{\frac{\bar F}{6\pi\eta a} = \bar u}$$

wzór Stokesa

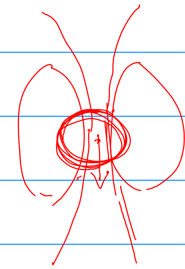
$$\bar v = \bar v_0 + \bar v_1 \qquad \boxed{r \geq a}$$

$\bar v_0$ – stokeslet (pole prędkości od siły punktowej)

$\bar v_1$ – dipol

$$\boxed{\bar v_1 = \frac{a^2}{6}\nabla p}$$

$\bar v_1$ – pole prędkości od dipola
rysunek



$$\bar v = (\bar v_0 + \bar v_1) = \frac{1}{8\pi\eta}\left(\frac{\bar F}{r} + \frac{a^2\,\bar F}{3\,r^3} + \frac{\bar F\cdot\hat r\,\hat r}{r} - \frac{\bar F\cdot\hat r\,\hat r}{r^3}\,a^2\right)$$

$$\bar v = \frac{\bar F}{8\pi\eta}\left(\frac{1}{r} + \frac{a^2}{3r^3}\right) + \frac{\bar F\cdot\hat r\,\hat r}{8\pi\eta}\left(\frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^3}\right)$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{F}}{6\pi\eta a} \qquad\qquad \frac{\bar{F}}{8} = \frac{\bar{F}}{6a}\cdot\frac{3a}{4}$$

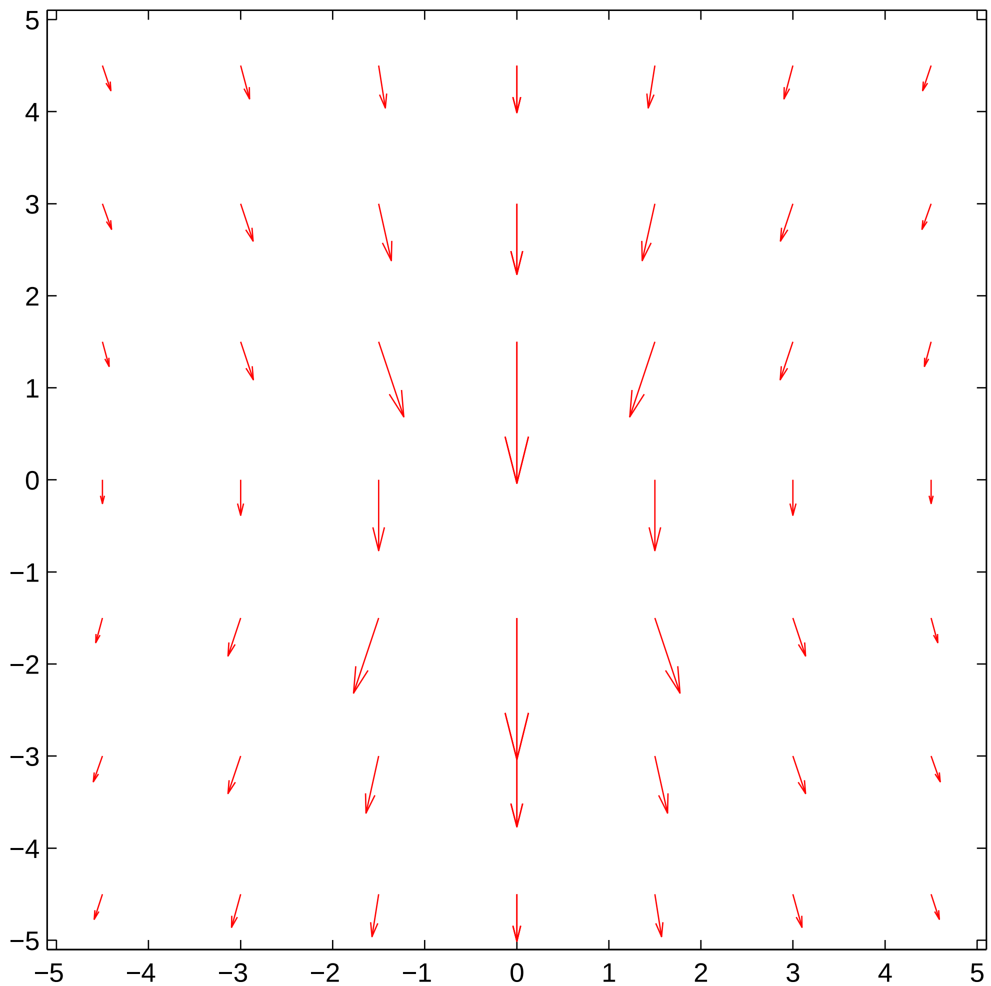
$$\boxed{\bar{v} = \bar{u}\left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3}\right) + \bar{u}\cdot\hat{r}\,\hat{r}\left(\frac{3a}{4r} - \frac{3a^3}{4r^3}\right)}$$

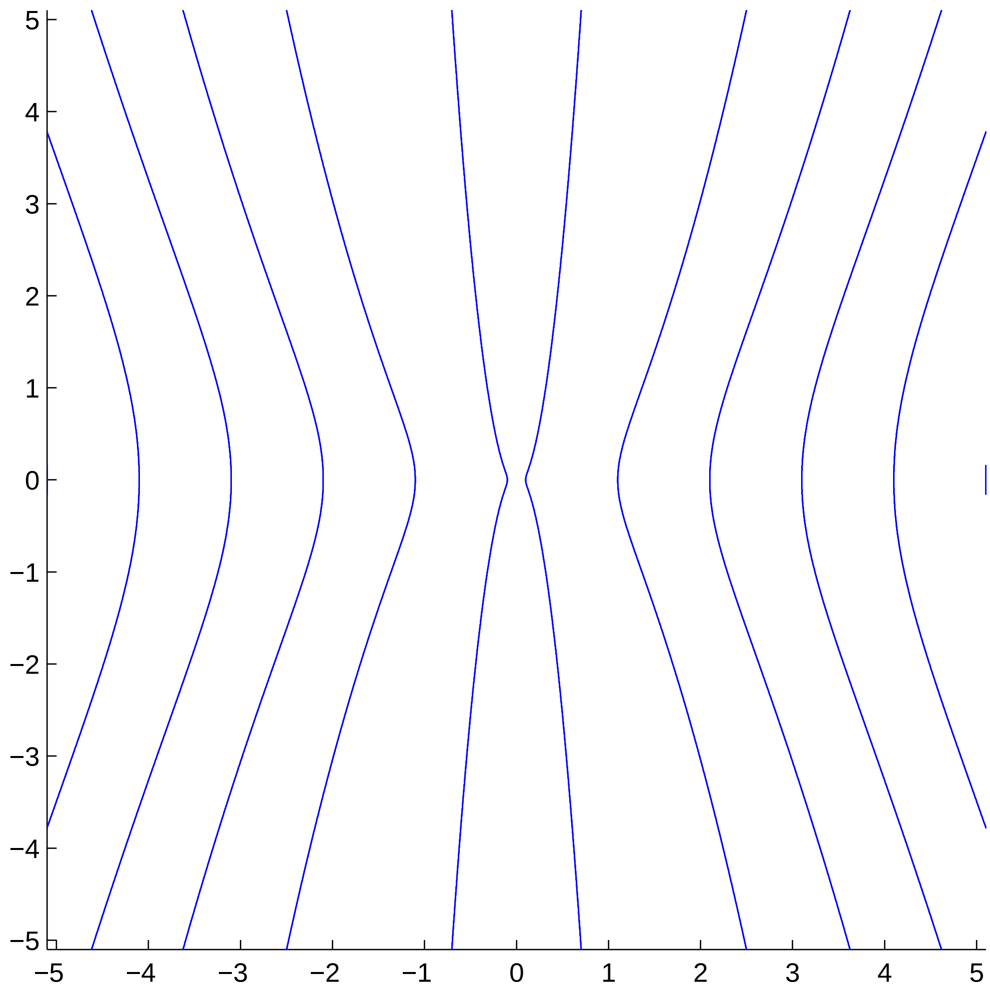
$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}_0 + \frac{a^2}{6\eta}\nabla p}$$

$\bar{v}_0, p$ – noi. fundamentale.

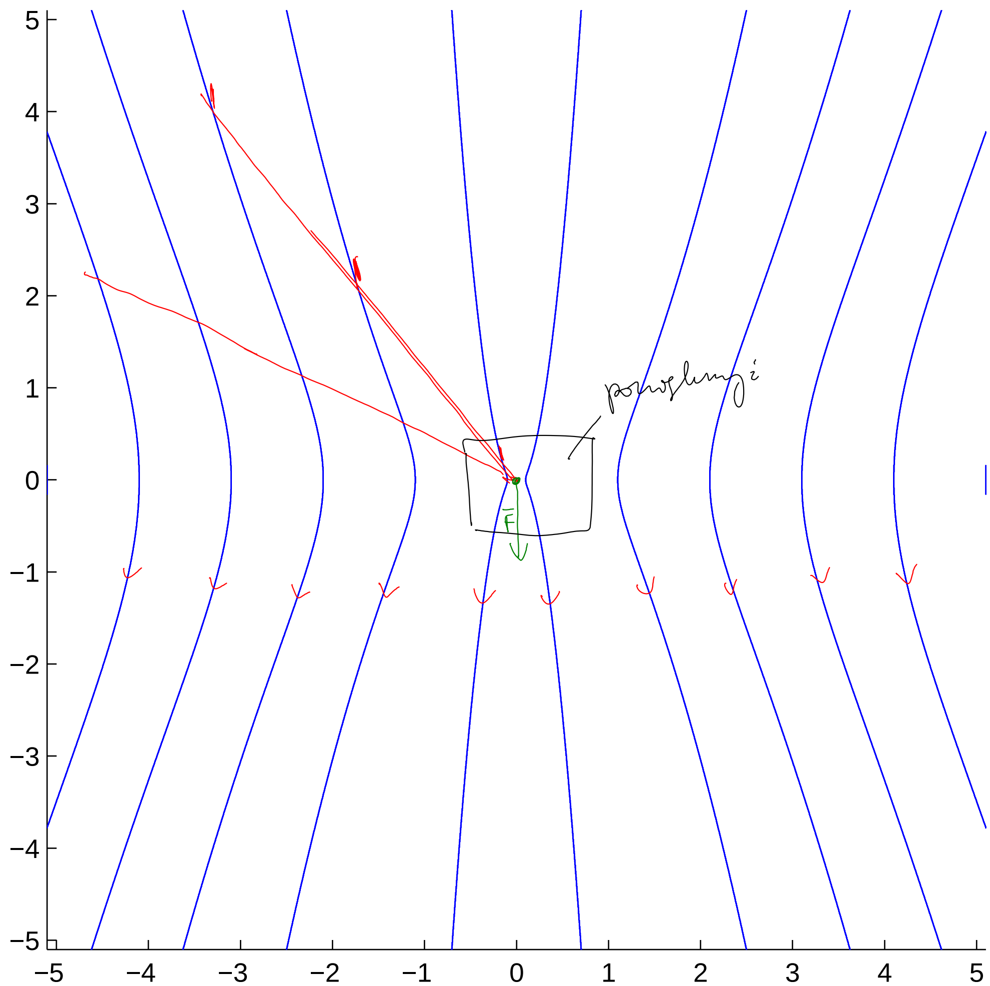
$$r \gg a \Rightarrow \nabla p = \eta \nabla^2 \bar{v}_0$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{a^2}{6}\nabla^2 \vec{v}_0}$$


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5



5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5



5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
$\bar{F}$