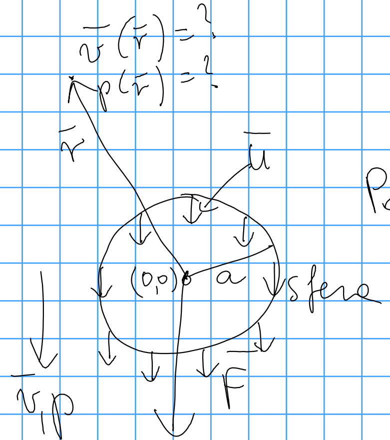



# Wykład 5.

24.11.2009

Poprzednio: $\bar F$ – dane, $\bar v(\bar r), p(\bar r) = ?$

1) jaki przepływ wokół kuli?
2) z jaką prędkością porusza się kula? $\bar U = ?$
3) jak 1) ma się do analogicznego pola przepływu wygenerowanego przez siłę punktową?

$$\boxed{\bar U = \frac{\bar F}{6\pi\eta a}}$$ prawo Stokesa

$$\bar v(\bar r) = \bar v_0(\bar r) + \frac{a^2}{6\eta}\nabla p_0(\bar r) = \bar v_0(\bar r) + \frac{a^2}{6}\nabla^2 \bar v_0(\bar r) = \text{monopol} + \text{kwadrupol}$$

$$p(\bar r) = p_0(\bar r) = \text{monopol}$$

$$\bar v_0 = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\bar F + (\bar F\cdot\hat r)\hat r\right) \qquad p_0 = \frac{\bar F\cdot\hat r}{r^2}$$

$\bar v, p$ – przepływ wokół sfery

$\bar v_0, p_0$ – przepływ wokół siły punktowej

Przypomnienie: 3 rodzaje rozwiązań (Lamb)

1° $\nabla p \neq 0$ $\quad \nabla^2 p = 0$ $\quad v$ wyraża się przez ciśnienie

Przykład: przepływ od siły punktowej

2° $\bar v = \nabla\chi$ $\quad \nabla^2\chi = 0$

$p = \text{const}$

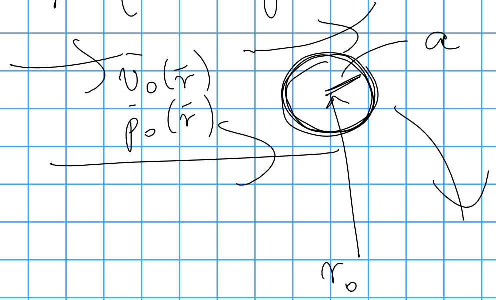
$$\begin{cases} \eta\nabla^2\bar v - \nabla p = 0 \\ \bar\nabla\cdot\bar v = 0 \end{cases}$$

3° $\bar v = \bar r\times\nabla\chi$ $\quad \nabla^2\chi = 0$ $\quad$ [lub $\bar v = \nabla\times(\bar r\chi)$]

$p = \text{const}$

Pytanie „na później":

Co będzie jeżeli sferę włożymy w przepływ zewnętrzny? Jaki ruch tej sfery? ≈ ?



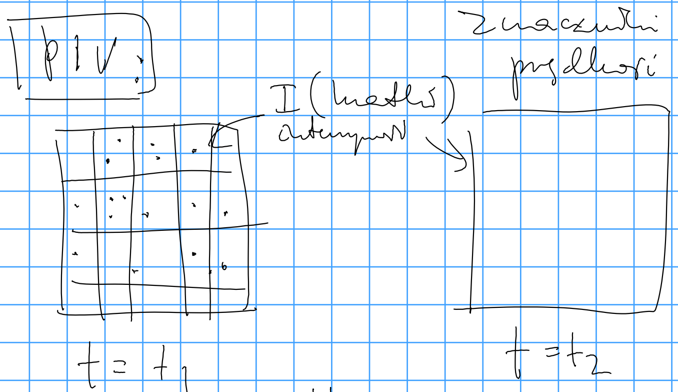

czy tak jak w PIV $\bar U = \bar v_0(\bar r_0)$ ?

$a \to 0 \Rightarrow \bar U \to \bar v_0(\bar r_0)$

ale dla $a \neq 0$ może tak nie być

Pytanie na następne zajęcia: a jakby były przepływy (jak się zmieni ten przepływ)

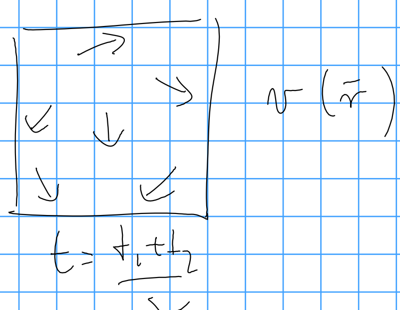
$\boxed{\text{PIV}}$:




znaczniki dodane do płynu
prędkość znaczników = prędkość płynu

porównanie ⇓
korelacji

⇓ Uśrednij cząstek w danej kratce




Cel bardziej ogólny: pokazać jak budować rozwiązania (przepływy) jako superpozycje „multipoli"

---

Pokażemy rozwiązania w postaci szeregów

Co wydrukowałam od Pańskie

1) zrobić już teraz stronę internetową

2) dostałam rysunki co dalej?

3) mniej wzorów pokazać różnice między przepisami w skali mikro i makro

wyprowadzenie + 6 osób
dalsze co daje ogólny pogląd

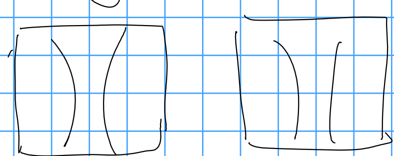
~~wyprowadzenie - 4 osoby~~
wartość co wynika ze wzoru różnice między skalą mikro a makro 10 osób wszyscy

1) rysunki z opisami
⇒ gmail grupa dyskusyjna p. Artur
pozostanie (tworzyć też)

A) teksty. p. Marek

B) rysunki p. Anna

C) modele MES. - przykład.



linie prądu od wody przepływ które są poprawne i dlaczego

D) zdjęcia (mam)

⇒ strona - „tworzyć" (p. Anna + p. Diana)

I to co związane z wykładem

II przykłady praktyczne spoza wykładu

Grupa - pozostała dla rysunków, tekstów itp. dotyczących wykładu

Różnice między przepływami w skali mikro i makro - efekty bezwładności + prawo podobieństwa

Pokaz dwóch par filmów z przykładami

Homsy et al. Multimedia Fluid Dynamics

Który przepływ ma większą liczbę Reynoldsa?

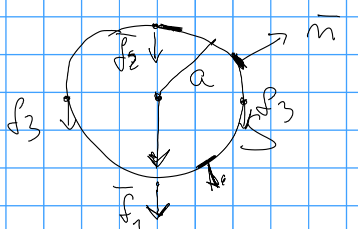
$(L_1 = L_2,\ V_1 = V_2 \quad \nu_1 > \nu_2$ czy $\nu_1 < \nu_2$?)

$$Re = \frac{L \cdot V}{\nu} \qquad \nu = \eta / \rho$$

lepkość kinematyczna

---

Przepływ wolności opadającej pod wpływem siły $\bar{F}$ kropli kulistej



$$\bar{f}(\bar{r}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \hat{n}\, \delta(r - a)$$

Kierunek? Amplituda? w zależności od położenia?

gęstość powierzchniowa sił działających na cząstkę

$$\bar{v}(\bar{r})\Big|_S = \bar{U} \quad \text{przyleganie}$$

płynu cząstka

$\bar{f}_2, \bar{f}_1 \parallel \bar{F}$

$\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ ale może $\bar{f}_2 < \bar{f}_1$

$\bar{f}_3$ - styczne ale może mniejsze niż $\bar{f}_1$

Czyli nie można zgadywać

$$\bar{v} \longrightarrow \bar{\bar{\sigma}} \qquad \sigma_{ij} = \eta\left(\partial_i v_{0j} + \partial_j v_{0i}\right) - \delta_{ij} p_0,$$

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \hat{r} \qquad 4\pi p_0 = \frac{\bar{F} \cdot \bar{r}}{r^3} \qquad 8\pi\eta v_{0i} = \frac{F_i}{r} + \frac{F_k r_k r_i}{r^3}$$

$$\underset{\text{kula}}{\bar{v}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{punkt}}}{\bar{v}_0} + \frac{a^2}{6\eta}\nabla \underset{\substack{\uparrow \\ \text{punkt}}}{p_0} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1 \qquad 8\pi\eta v_{0j} = \frac{F_j}{r} + \frac{F_k r_k r_j}{r^3}$$

$$8\pi\, \sigma_{0ij} \cdot \frac{r_j}{r} = \frac{r_j}{r}\Big(-\frac{F_j r_i}{r^3} - \frac{3 r_i F_k r_k r_j}{r^5} + \frac{F_i r_j + F_k r_k \delta_{ij}}{r^3}$$

$$-\frac{F_i r_j}{r^3} - \frac{3 r_i F_k r_k r_j}{r^5} + \frac{F_j r_i}{r^3} + \frac{F_k r_k \delta_{ij}}{r^3} - 2\delta_{ij}\frac{F_k r_k}{r^3}\Big)$$

$=$

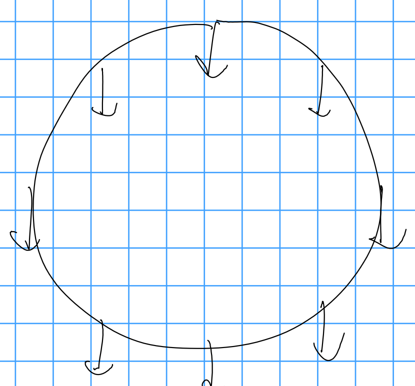
$$= -\frac{6 r_i\, \bar F\cdot\bar r}{r^4}\Big|_{r=a} = \frac{-6\hat r_i\, \bar F\cdot \hat r}{a^2}$$

$$8\pi\, \sigma_{1ij}\cdot \frac{r_j}{r}\Big|_{r=a} = \frac{2}{3}a\left(\frac{9\bar F\cdot\bar r\, r_i}{a^5} - \frac{3F_i}{a^3}\right)$$

$-8\pi f$ = suma gęstości sił od monopola i kwadrupola

$$= 8\pi\, \sigma_{ij}\cdot\frac{r_j}{r}\Big|_S = \frac{-2F_i}{a^2} \qquad \boxed{\bar f(\bar r) = \frac{\bar F}{4\pi a^2}}$$

wkłady ~ $\hat r_i\, \bar F\cdot\hat r$ od monopola i kwadrupola się kasują i zostaje tylko wkład $\parallel F_i$

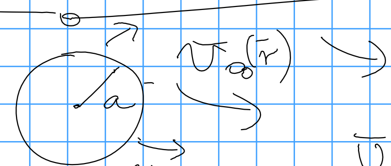


$\boxed{\text{gęstość sił jest taka sama w każdym punkcie}}$

Dlaczego tak jest?

---

Prawo Faxena.




$\bar U$ $\qquad \bar U_\infty$ spełnione r. Stokesa

(2) $\left|\bar{v} - \bar{v}_{\infty}\right| \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

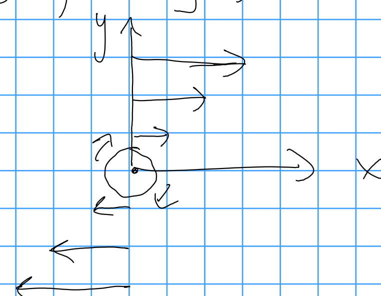
(3) $\bar{v}$ sp. r. Stokesa

(4) $\bar{v}(\bar{r})\Big|_S = \bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}$

$\bar{U} = ?$

Przykład. Przepływ ścinający

$\bar{v}_{\infty}(\bar{r}) = k y \hat{e}_x$




Cząstka znajduje się w punkcie $\bar{r} = \bar{0}$

$p_{\infty} = \text{const}$

(5) $\bar{F} = 0$

W ogólności: superpozycja

$$\bar{v} = \bar{v}_{\infty}(\bar{r}) + \bar{u}_1(\bar{r})$$

$$p = p_{\infty}(\bar{r}) + p_1(\bar{r})$$

dane — zaburzenie (nieznane)

Szukane: $\bar{U}$ i $\bar{\Omega}$ ?

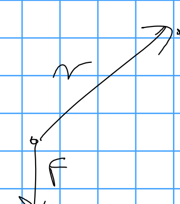
Tensor Greena w działaniu na $\bar{F}$ = pole prędkości wygenerowane przez siłę punktową

Tensory Greena dla r. Stokesa w $\infty$ płynie

$$\bar{v}_0(\bar{r}) = \underbrace{\bar{\bar{T}}(\bar{r})} \cdot \bar{F}$$

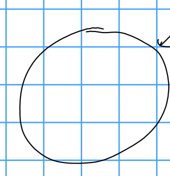
$$p_0(\bar{r}) = \bar{P}(\bar{r}) \cdot \bar{F}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\bar{T}}(\bar{r}) &= \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\bar{\bar{I}} + \hat{r}\hat{r}\right) \\ \bar{P}(\bar{r}) &= \frac{\bar{r}}{4\pi r^3} \end{aligned}}$$




$$\boxed{\eta \nabla^2 \bar{\bar{T}} - \nabla \bar{P} = -\delta(r)\, \bar{\bar{I}}}$$

f − gęstość sił indukowanych na pow. S



w. brzegowy na kuli

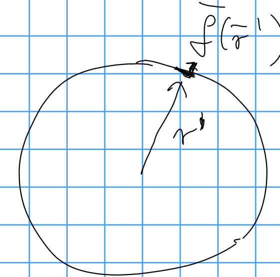
Zamiast r. Stokesa + w. brzegowe przyklejania na zewnątrz cząstki

r. Stokesa w całej przestrzeni + dodatkowy rozkład sił $f$ działająca na pow. (nieznane)

$$\boxed{\eta \nabla^2(\bar v - \bar v_0) - \nabla(p - p_0) = -f(\bar r)}$$

$v_1 = \bar v - \bar v_0 \qquad p_1 = p - p_0$

$f \sim \delta(r-a)$




$$\boxed{\bar v - \bar v_0 = \int d^3\bar r' \, \bar{\bar T}(\bar r - \bar r')\cdot \bar f(\bar r')}$$

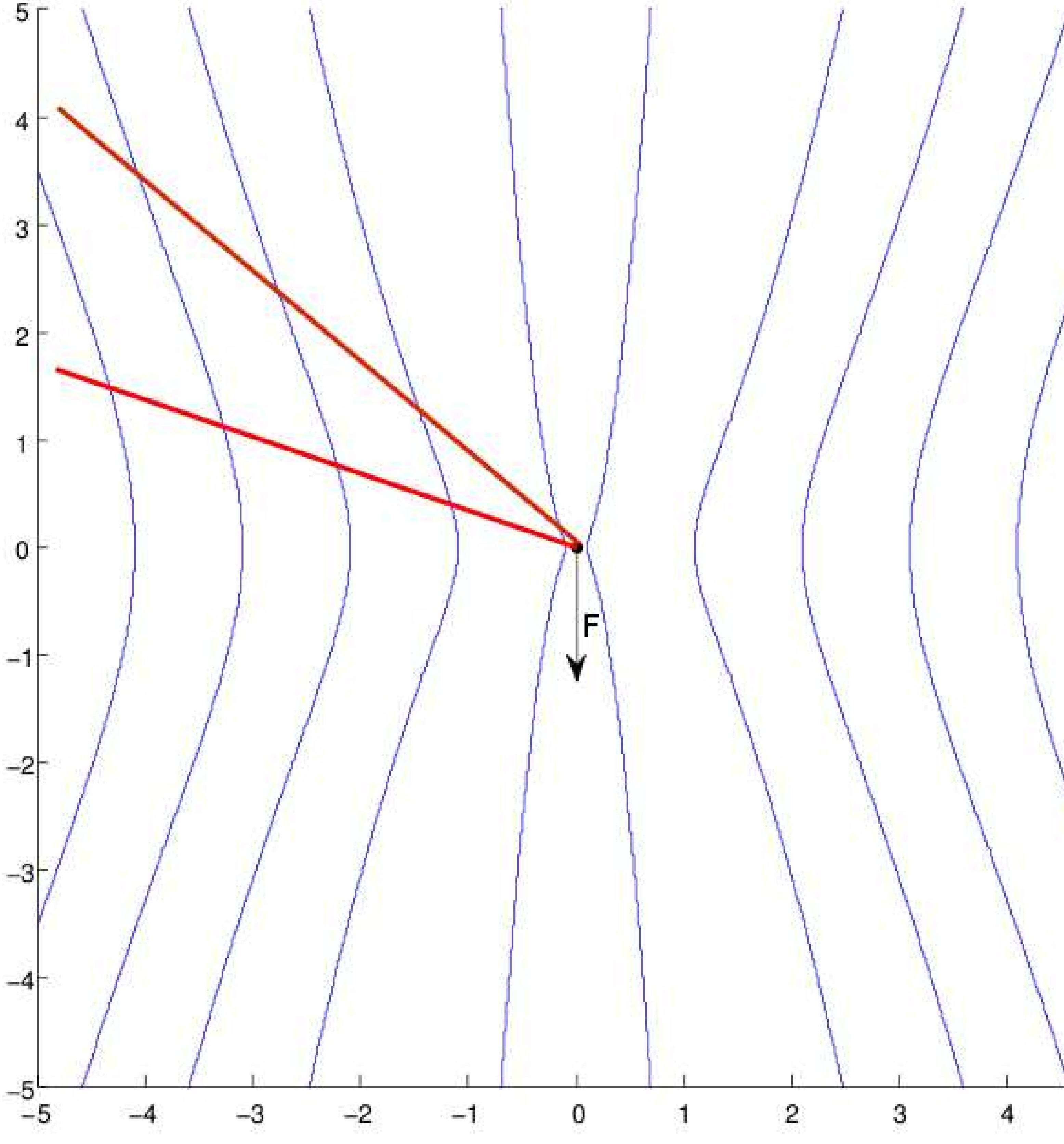
$$f = -\bar{\bar\sigma}\cdot\bar n \, \delta(r-a)$$

reprezentacja całkowa + r. brzegowe

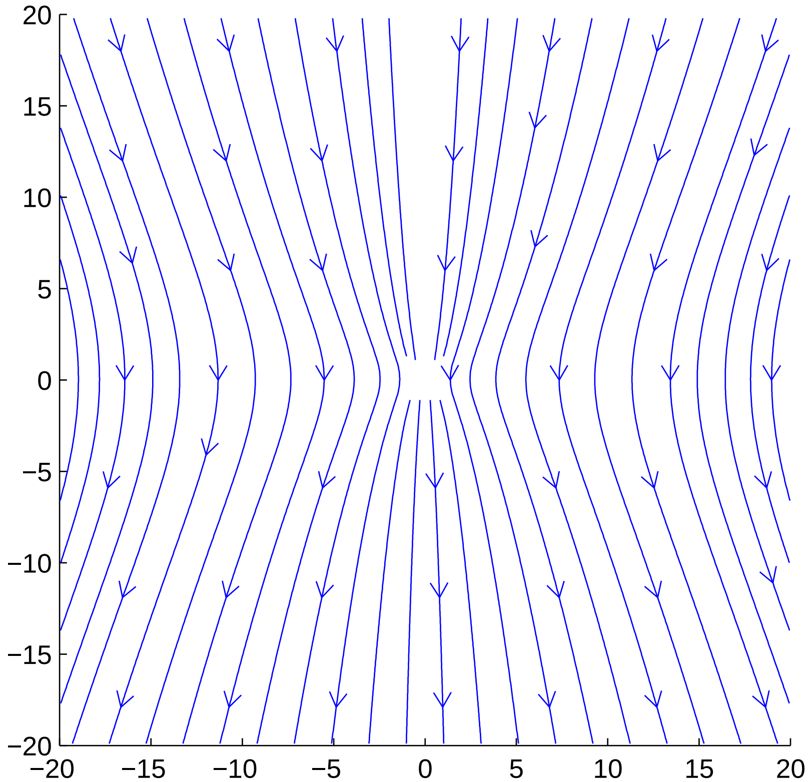
$\Downarrow$

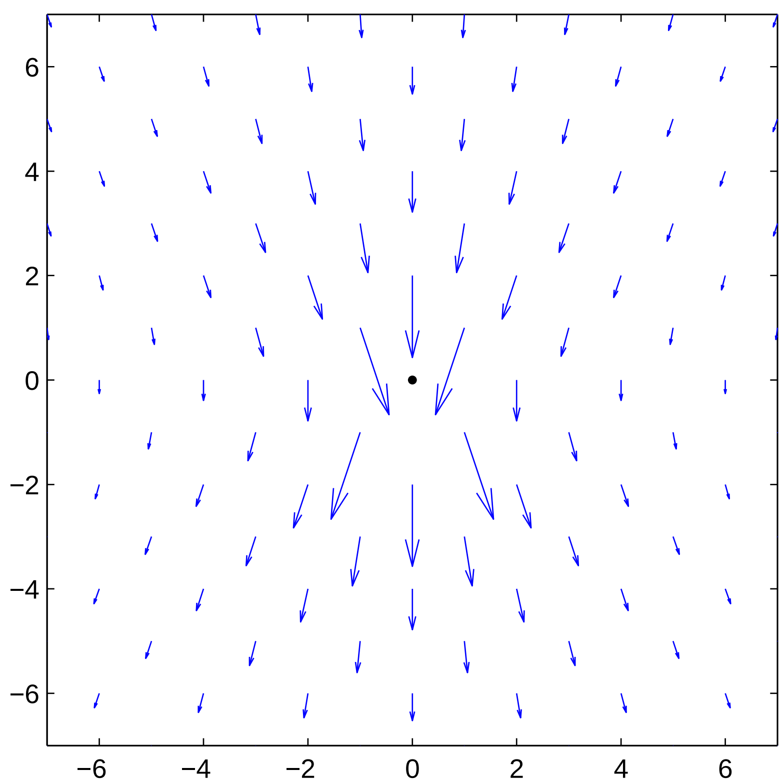
$$\int d^3\bar r' f = -\int dS \, \bar{\bar\sigma}\cdot\bar n$$

$U =$



5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
F
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4


20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20


6
4
2
0
−2
−4
−6
−6
−4
−2
0
2
4
6