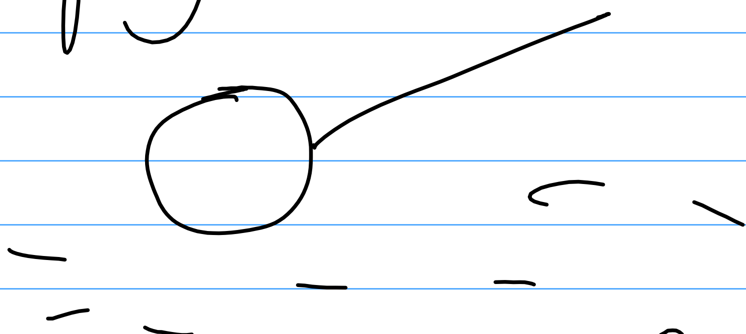
Wykład 9,

1° Film Taylora - opadanie pręta + pływanie

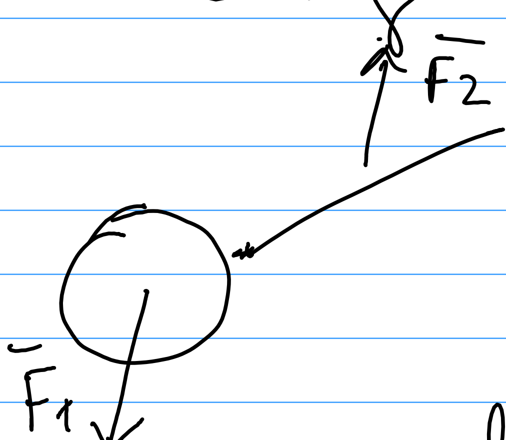
2° Sformułowanie problemu pływania



gęstości pływaka = gęstości płynu

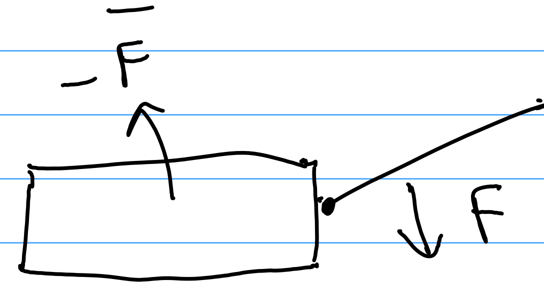
lepki płyn

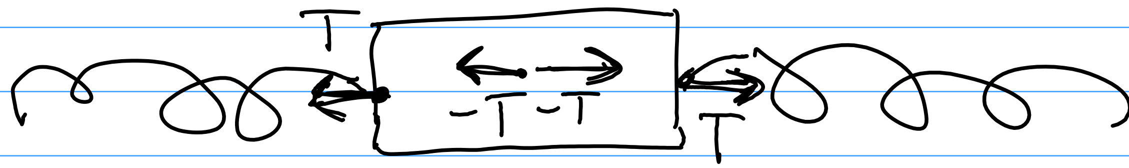
Nie ma sił zewnętrznych
nie ma momentów sił zewnętrznych działających na całego pływaka



Efekt netto jest taki, że działające siły lub momenty sił na fragmenty pływaka

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$$





Najprostszy model przyrody;
zbiór cząstek punktowych
(do końca roku)

Zadanie domowe

(A)

$F(t) = ?$

$t = 0$

t

$t = T$

T – długość cyklu

Czy można tak dobrać

F(t) aby w ciągu 1 cyklu każde z tych ciastek przemieściło się w prawo lub lewo?

(B) To samo pytanie dla 3 ciastek na linii prostej (i sił wzdłuż tej linii).

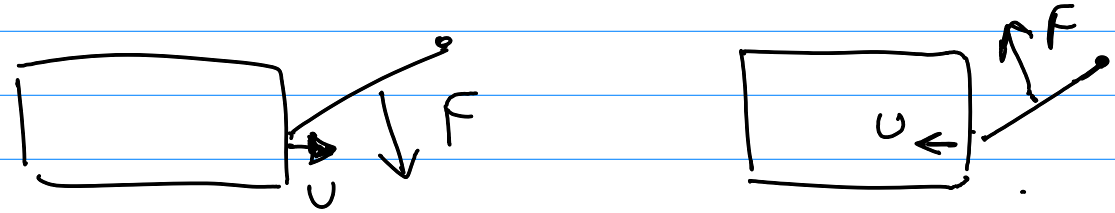
Pytanie: czy da się pokazać, że pływaki – niemożliwe nie może pływać dla niskich l. Reynoldsa?

Uwagi do następnego spotkania:

- warunki brzegowe
- ruch ciastek wewnątrz porów (cylindry)

- Sposoby kwantyzacji rozwiązanie dla sfer

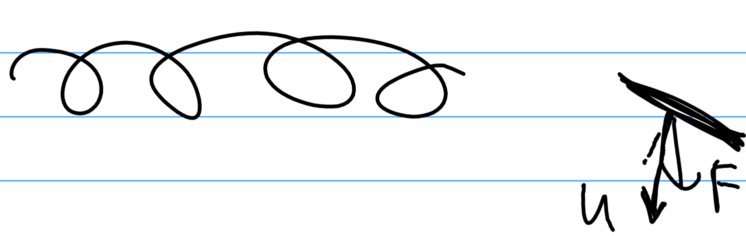
<u>Uwaga końcowa:</u> dojdziemy do rozwiązania fundament. (dla siły punktowej) w pobliżu sztywnej ścianki



Odwrócenie w czasie $F \to -F$

$$v \to -v$$

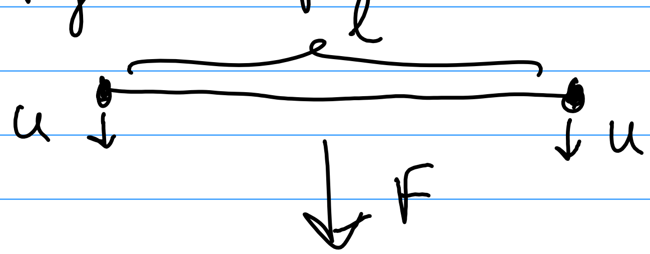
Ale cykl zawsze kwantowy, które są koniecznie odwrócone w czasie (ruch w przód i w tył tak samo)



Wtedy od poszczególnych kwantów się dodają

(prawie ten sam model)

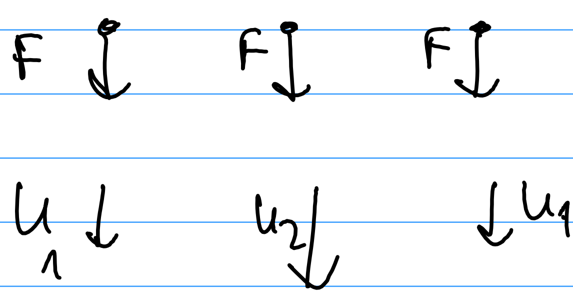
Rozkład ciężaru (uwaga na błędy)



$$F = \int_0^L f(l)\,dl$$

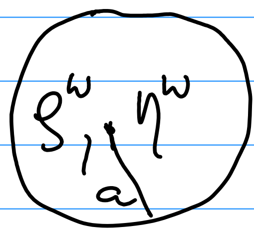
$f(l) = ?$

□□ siły wyrażają więc
$f(l) = \mathrm{const}(l)$



Jakie przedłużenie?

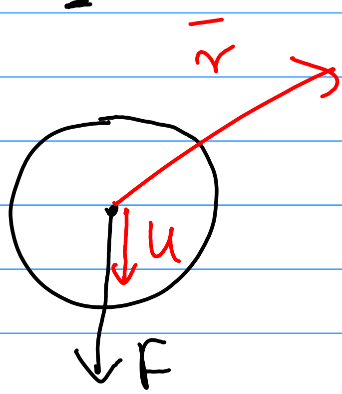
Krople (sferyczne)



$\rho^z, \eta^z \qquad \rho^w \neq \rho^z$

Na kroplę działa siła grawitacji - siła wyporu

$$\boxed{F} = g\,\frac{4}{3}\pi a^3 \left(\rho^w - \rho^z\right)$$



$U = ?$

$\bar{v}(\bar{r}) = ?$

wewnątrz $\bar{v}^w = ?$

na zewnątrz $\bar{v}^z = ?$

Warunki brzegowe:

1° $\left[v^w - v^z\right]_{r=a} = 0$

2°

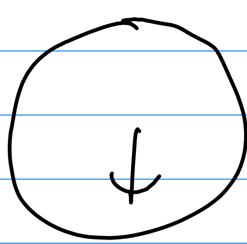
$$\bar{r}\cdot\left[\sigma^w - \sigma^z\right]\cdot\bar{t} = 0$$

$\bar{t}$ – wektor styczny do powierzchni sfery

Składowa normalna może być nieciągła jeśli jest napięcie powierzchniowe

2° $$\sigma^w_{ij} = \eta^w\left(\partial_i v^w_j + \partial_j v^w_i\right) - p^w \delta_{ij}$$

Konstrukcja rozwiązania.



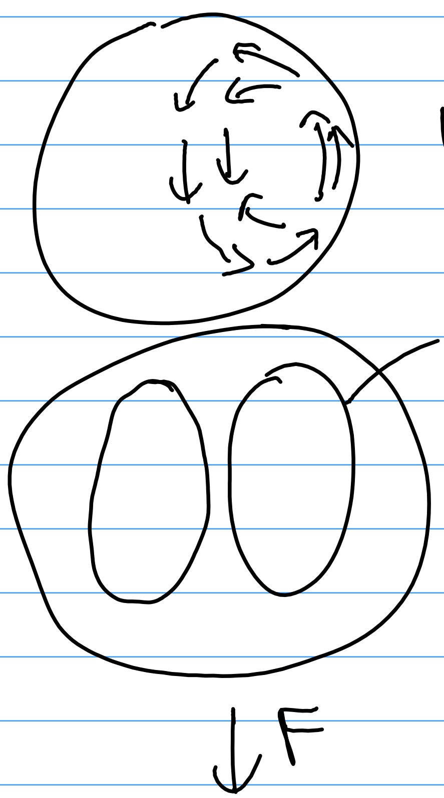
Intuicja:

wewnątrz kropli prędkość opadania w środku większa mniejsza na zewnątrz

Szukamy pola prędkości w chwili początkowej gdy kropla jest sferyczna

Przybliż.: A) jeśli jest napięcie powierzchniowe (duże) to kropla pozostanie sferyczna

B) jeśli nie ma napięcia pow. lub jest ono małe ⇒ deformacja



W układzie środka masy:

linie prądu

Wyprowadzenie

1) Najpierw próbujemy zgadnąć $\bar{v}^w$ (co jest wewnątrz)

Najprostsze:

ruch postępowy lub obrót bryły sztywnej

tego u nas nie ma

Szukamy rozwiązania w postaci wielomianowej

$$\bar{v}^w = \bar{U}_0 + \left(\alpha_1 \bar{I} r^2 + \alpha_2 \bar{r}\bar{r}\right) \cdot \bar{F}$$

$$\bar{U}_0 \parallel \bar{F}$$

(układ laboratoryjny)

$\bar{F}, \bar{r}$

nie ma członów liniowych,

$$p^w = \alpha \bar{F} \cdot \bar{r} \qquad \nabla p^w = \alpha \bar{F}$$

$\bar{U}_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha$ - nieznane

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{v}^w = 0 \quad , \quad \eta^w \nabla^2 \bar{v}^w - \nabla p^w = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\alpha_1(\alpha_2) \qquad\qquad\qquad \alpha_2(\alpha)$$

zostanie : u_0, α_2

te wyznaczymy z w. brzegowych

$$\nabla\cdot\bar{v}^w = 0$$

$$\bar{\nabla}\cdot\left[\alpha_1 r^2 \bar{F} + \alpha_2 \bar{r}(\bar{r}\cdot\bar{F})\right] = 0 .$$

$$\partial_i\left[\qquad\qquad\right]_i = \alpha_1 \cdot 2 r_i F_i +$$

$$+ \alpha_2 \partial_i r_i (\bar{r}\cdot\bar{F}) + \alpha_2 r_i F_i = 0 .$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_2 = 0$$

$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \qquad\qquad \alpha_1 = -2\alpha_2$$

$$\eta^w \nabla^2 \alpha_2 (\bar{r}\bar{r} - 2r^2)\bar{F} - \alpha\bar{F} = 0$$

$$\nabla^2 = \partial_k \partial_k$$

$$\partial_k \partial_k \left(r_i r_j - 2r^2 \delta_{ij} \right) F_j =$$

$$= \partial_k \left(\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i - 4 r_k \delta_{ij} \right) F_j$$

$$= \left(\delta_{ik} \delta_{kj} + \delta_{jk} \delta_{ki} - 4 \cdot 3 \delta_{ij} \right) F_j =$$

$$-10 \delta_{ij} F_j = -10 F_i$$

$$-10 \eta^w \alpha_2 - \alpha = 0$$

$$\alpha = -10 \eta^w \alpha_2$$

Cały wynik:

$$\boxed{\begin{aligned} p &= -10 \eta^w \alpha_2 \bar{F} \cdot \bar{r} \\ v^w &= \alpha_2 \left(\bar{r} \bar{F} - 2r^2 \bar{I} \right) \cdot F + \bar{u}_0 \end{aligned}}$$

Rozwiązanie na zewnątrz.

$$\alpha_2 \left(\underbrace{\bar{r}\bar{r} + r^2 \bar{I}} \right) - \underbrace{3 r^2 \alpha_2 \bar{F} + \bar{u}_0}$$

?

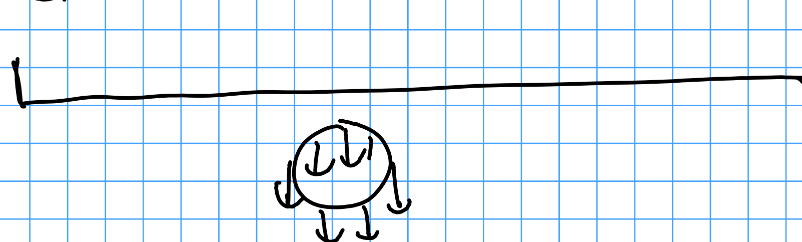
$$\bar{v}(\bar{r}) \xrightarrow[\bar{r}\to\infty]{} 0$$

$$C\,\bar{\bar{T}}(\bar{r})\cdot\bar{F}$$

$\uparrow$?

$$\text{Coś} + C\underbrace{\left(1+\frac{a^2}{6}\nabla^2\right)\bar{\bar{T}}(\bar{r})\cdot\bar{F}}_{\text{rozwiązanie dla sztywnej kuli}}$$

$C<1$



Propozycja:

$$v^z = C\left(1+\frac{a^2}{6}\nabla^2\right)\bar{\bar{T}}(\bar{r})\cdot\bar{F} + E\,\bar{\bar{T}}(\bar{r})\cdot\bar{F}$$

W. brzegowe dla prędkości

$$\left(v^z - v^w\right)_{r=a} = 0$$

Na powierzchni:

$$v^w = \alpha_2(\bar r\bar r - 2r^2\bar{\bar I})\cdot\bar F + u_0$$

$$\left(1+\frac{a^2}{6}\nabla^2\right)(\bar{\bar T}\cdot\bar F)\Big|_{\text{powierzchni}} = \bar F/6\pi\eta a \qquad \bar{\bar T}\cdot\bar F\Big|_{\text{na powierzchni}} = \frac{\bar F\cdot}{8\pi\eta a^3}(\bar{\bar I}a^2+\bar r\bar r)$$

$$v^w - v^z = u_0 + \alpha_2\underbrace{(\bar r\bar r - 2r^2\bar{\bar I})}_{\bar r\bar r+\bar{\bar I}a^2-3a^2\bar{\bar I}}\cdot\bar F - \frac{\bar F C}{6\pi\eta a} - \frac{E\,\bar F}{8\pi\eta a^3}(\bar{\bar I}a^2+\bar r\bar r)$$

$$= u_0 + \underbrace{\left(\alpha_2 - \frac{E}{8\pi\eta a^3}\right)}_{=0}(\bar r\bar r + a^2\bar{\bar I}) - 3a^2\alpha_2\bar F - \frac{C\bar F}{6\pi\eta a}$$

$$u_0 - \left(3a^2\alpha_2 + \frac{C}{6\pi\eta a}\right)F = 0$$

$$E = 8\pi\eta a^3\alpha_2 \qquad 3a^2\alpha_2 + \frac{C}{6\pi\eta a} = u_0/F$$

$$C = 6\pi\eta a\left[\frac{u_0}{F} - 3a^2\alpha_2\right]$$

α_2, u_0 - nadal do wyznaczenia

skąd? z warunku na tensor naprężeń

1° $\bar r\cdot(\bar{\bar\sigma}^w - \bar{\bar\sigma}^z)\cdot\bar t = 0$

2° $\bar F = \int_S \bar n\cdot\bar{\bar\sigma}^z\cdot\bar n\, dS$

1° Chcemy policzyć

$$r_k\sigma_{ki}\Big|_{\text{sfer.}} = r_k\,\eta\,(\partial_k v_i + \partial_i v_k)\Big|_{\text{symetr.}}$$

$$v_i = \alpha_2(r_i r_m - 2r^2\delta_{im})F_m$$

$$v_k = \alpha_2(r_k r_m - 2r^2\delta_{km})F_m$$

$$r_k \sigma^w_{ki} = \alpha_2 \eta^w r_k \left(2\delta_{ik} r_m + r_i \delta_{mk} - 4 r_k \frac{\delta_{mi}}{?} + r_k \delta_{mi} - 4 r_i \delta_{km}\right) F_m =$$

$$= \alpha_2 \eta^w \left[F_i \left(-4r^2 + r^2\right) + (2+1-4) r_i \, F \cdot \bar{r} \right]$$

$$= \underline{\alpha_2 \eta^w \left[F_i \left(-3r^2\right) - r_i \, \bar{F} \cdot \bar{r} \right]}$$

$$r_k \sigma^z_{ki} = r_k \eta^z \left(\partial_k v^z_i + \partial_i v^z_k\right)$$

$$= \frac{r_k}{8\pi} \left((C+E) \right.$$

$$v^z_m = C\left(1 + \frac{a^2}{6}\nabla^2\right) \frac{\bar{r}\bar{r} + r^2 I}{8\pi\eta r^3} \cdot F + E \frac{\bar{r}\bar{r} + r^2 I}{8\pi\eta r^3} \cdot F$$

$$= (C+E) \frac{\bar{r}\bar{r} + r^2 I}{8\pi\eta r^3} F + \frac{Ca^2}{6} \nabla^2 \frac{\bar{r}\bar{r} + Ir^2}{8\pi\eta r^3} F$$

$$\partial_k \frac{(r_m r_l + r^2 \delta_{ml}) F}{r^3} =$$

$$= -\frac{3 r_k (r_m r_l + r^2 \delta_{ml}) F}{r^5} + \frac{\cancel{(\delta_{mk} r_l + r_m \delta_{kl} + 2 r_k \delta_{ml})} F}{r^3}$$

dokończenie następnym razem
(jak do rotacji?)

Podsumowanie: kropla opada szybciej niż cząstka stała

$U(\lambda)$

$$\lambda = \frac{\eta^w}{\eta^z}$$

$\lambda \to \infty$

$U \to F / 6\pi\eta a$

$\lambda \to 0$

$U \to F / 4\pi\eta a$