9.03.2010

Wykład 2.

Opadanie kropli $\qquad \rho^w, \eta^w \quad \rho^z, \eta^z$

$$\lambda = \frac{\eta^w}{\eta^z}$$

Ciśnienie wewnątrz

$$p = p_0 - \frac{5}{6\pi a^3}\,\frac{\lambda}{\frac{2}{3}+\lambda}\,\bar{F}\cdot\bar{r}$$

$\lambda \to \infty$ w środku sztywna kulka

$$\bar{\nabla} p = -\frac{5}{6\pi a^3}\,\frac{\lambda}{\frac{2}{3}+\lambda}\,\bar{F}$$

Jaka jest siła działająca na 1 powierzchni kropli w kierunku prostopadłym do powierzchni?

$$\hat{r}\cdot\left(\bar{\bar{\sigma}}^z - \bar{\bar{\sigma}}^w\right)\cdot\hat{r} = ?$$

$$\hat{r}\cdot\bar{\bar{\sigma}}^z\cdot\hat{r} =$$

$$\sigma^z_{ij} = \eta^z\left(\partial_i v^z_j + \partial_j v^z_i\right) - \delta_{ij}\, p^z$$

$$\partial_i\left(\quad\right)_{jk}\cdot F_k$$

$$6\pi \quad \bar{r} \cdot \bar{\bar{\sigma}}^{z} \cdot \bar{r} = 6\pi a\, r_i\, \sigma^{z}_{ij}\, r_j =$$

$$= \frac{3}{4} F_k \Big\{ 2 r_i r_j \partial_i \Big[\frac{1}{r}\Big(\delta_{kj} + \frac{r_k r_j}{r^2}\Big) + \frac{\lambda a^2}{(\frac{2}{3}+\lambda) r^3}\Big(\frac{\delta_{kj}}{3} - \frac{r_k r_j}{r^2}\Big)\Big]$$

$$- r^2 \frac{r_k}{r^3} \cdot \frac{\cancel{6\pi}}{\cancel{4\pi}_{\,2}} \frac{4}{3} \Big\} = \frac{3}{2} F_k \Big\{ -\frac{r_k}{r} +$$

$$+ r_i r_j \Big[-\frac{\delta_{kj}}{r^3} r_i + \frac{\delta_{ki} r_j + \delta_{ji} r_k}{r^3} - \frac{3 r_i r_k r_j}{r^5}$$

$$+ \frac{\lambda a^2}{(\frac{2}{3}+\lambda)} \Big(-\frac{r_i \delta_{kj}}{r^5} - \frac{\delta_{ki} r_j + \delta_{ji} r_k}{r^5} +$$

$$+ \frac{5 r_i r_k r_j}{r^7} \Big) \Big] \Big\} = \frac{3}{2} F_k \Big\{ -\cancel{2}\frac{r_k}{r} + \cancel{2}\frac{r_k}{r} - \frac{3 r_k}{r} +$$

$$+ \frac{\lambda a^2 r_k}{(\frac{2}{3}+\lambda)} \Big(-\frac{3}{r^3} + \frac{5}{r^3} \Big) \Big\} = \frac{3}{2} \frac{F_k r_k}{r} \Big[-3 + \frac{\lambda a^2 \cdot 2}{(\frac{2}{3}+\lambda) r^2} \Big]$$

$$\xrightarrow[r \to a]{} \frac{3}{2} \frac{F_k r_k}{a} \Big(-3 + \frac{2\lambda}{(\frac{2}{3}+\lambda)} \Big) =$$

$$= \frac{3}{2} (\bar{F} \cdot \hat{r}) \Big(-3 + \frac{2\lambda}{\frac{2}{3}+\lambda} \Big)$$

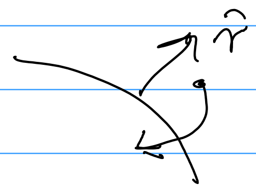
$$\bar{r} \cdot \bar{\bar{\sigma}}^{z} \cdot \bar{r} \Big|_S = \frac{\bar{F} \cdot \hat{r}}{4\pi} \Big(-3 + \frac{2\lambda}{\frac{2}{3}+\lambda} \Big)$$

$$\hat{r}\cdot\bar{\bar{\sigma}}^{z}\cdot\hat{r}\Big|_S = \frac{\bar{F}\cdot\hat{r}}{4\pi a^2}\left(-3+\frac{2\lambda}{\frac{2}{3}+\lambda}\right)$$

$$\hat{r}\cdot\left(\bar{\bar{\sigma}}^{z}-\bar{\bar{\sigma}}^{w}\right)\cdot\hat{r}\Big|_S = \frac{\bar{F}\cdot\hat{r}}{4\pi a^2}\left(-3+\frac{2\lambda}{\frac{2}{3}+\lambda}-\frac{2\lambda}{\frac{2}{3}+\lambda}\right)$$

$$= -3\,\frac{\bar{F}\cdot\hat{r}}{4\pi a^2} = -3\,\frac{\Delta\rho\cdot\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2}\,\bar{g}\cdot\hat{r} = \Delta\rho\,\bar{g}\cdot\bar{r}$$

Co do znaku?



Wróćmy do równań Stokesa

$$\eta^{\square}\nabla^2 v^{\square} - \nabla p^{\square} = 0$$

co to jest?
to jest ciśnienie zmodyfikowane (z grawitacją!)

$p \longleftrightarrow$ jak uwzględniamy

$\neq$ gęstości płynów?

bilans sił na 1 objętości

$$\text{siły lepkie}^{\square} - \nabla p^{\square}_{\text{prawdziwe}} + \underline{\underline{\rho}}^{\square}\bar{g} = 0.$$

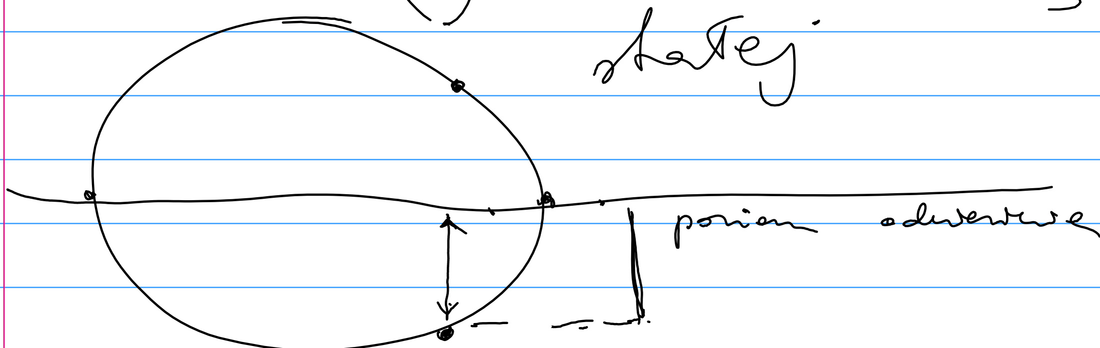
$$\nabla\left(p_{\text{prawdziwe}} + \rho^{D}\bar{g}\cdot\bar{r}\right)$$

Czyli w równaniu tensorów naprężeń

$p \rightarrow p_{\text{prawdziwe}}$

$$\Delta p - \Delta p_{\text{prawdziwe}} = \underbrace{\Delta\rho\,\bar{g}\cdot\bar{r}}$$

<u>Wniosek</u>: ~~ciśnienie~~ różnica hydrostatycznych równoważy siły naprężeń lepkich z dokładnością do stałej



p_0^{z} p_0^{w}

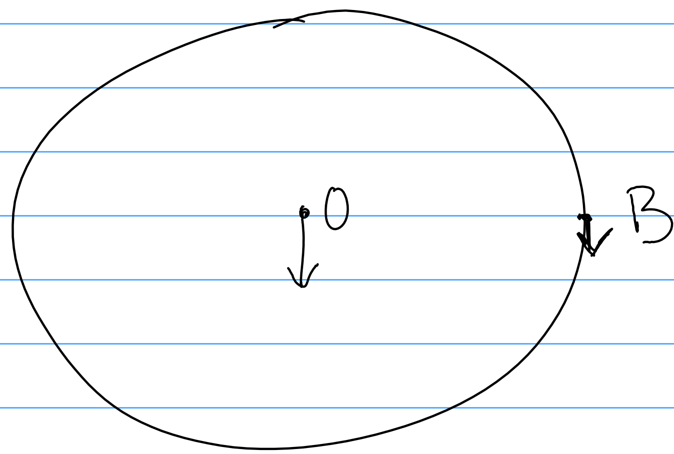
W każdym punkcie powierzchni naprężenie normalne jest takie samo (ale może być słabe)

Np. przy wystąpowaniu naprężenia

powierzchniowego $p_o^z \mp p_o^w$

$+ \boxed{\text{błony}}$

Ruch wewnątrz kropli:



$$6\pi\eta^z a\, v(O) = \frac{\lambda + 3/2}{\left(\frac{2}{3}+\lambda\right)} F$$

$$6\pi\eta^z a\, v(B) = \left[\frac{\lambda+3/2}{\left(\frac{2}{3}+\lambda\right)} - \frac{1}{\left(\frac{2}{3}+\lambda\right)}\right] F = \frac{\lambda+\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}+\lambda\right)} F$$

$$6\pi\eta^z a\, U = \frac{1+\lambda}{\frac{2}{3}+\lambda} F$$

$$\lambda = 1. \qquad \frac{6\pi\eta^z a}{F}\begin{pmatrix} U \\ v(O) \\ v(B)-U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 3/2 \\ 3/10 \end{pmatrix}$$

$$v(0)\Big|_{\lambda=1} = \frac{5/2}{5/3} = 3/2$$

$[v(0)-u]/u = 25\%$

$\lambda = 0$

$$\frac{6\pi \eta^z a}{F}\begin{pmatrix} u \\ v(0) \\ v(0)-u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$[v(0)-u]/u = 50\%$

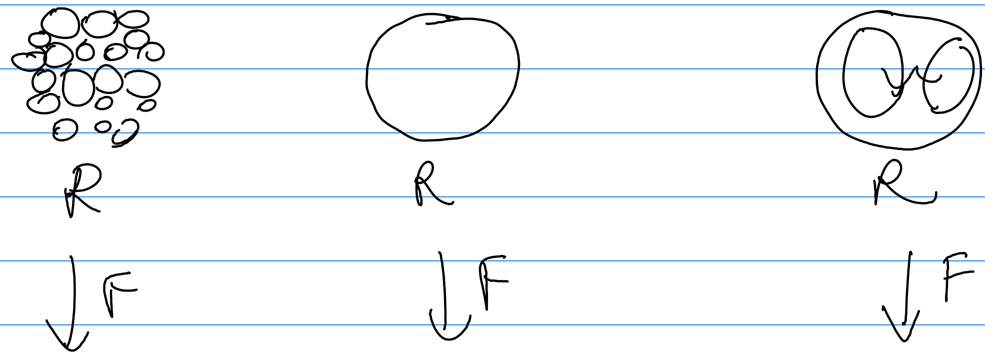
F - ustalone $\Rightarrow$

prędkość kropli rośnie gdy stosunek lepkości $\frac{\eta^w}{\eta^z}$ maleje (czyli lepkość płynu wewnątrz maleje)

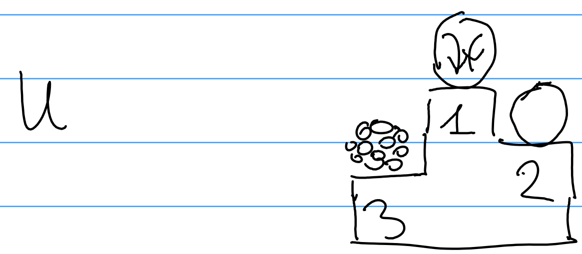
prędkość kropli > prędkość kulki

Pytanie: jak opadła kulka wykonana z substancji porowatej?

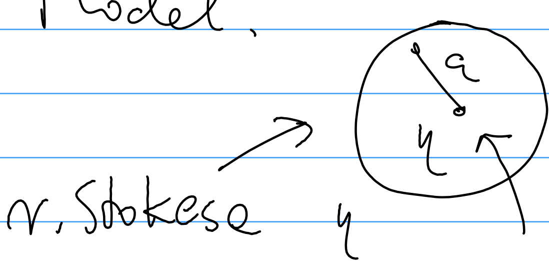
porowate stałe krople, $\lambda = \frac{\eta^w}{\eta^z}$



Która z nich będzie opadać z najmniejszą prędkością U?



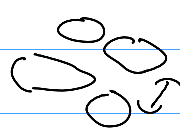
Model.



$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0$$

$$\eta\left(\nabla^2 \bar{v} - \kappa^2 \bar{v}\right) - \nabla p = 0$$

Równanie Debye-Büche-Brinkman



rozmiar porów mały w por. z a

k – odwrotność pewnej skali długości (~ wielkość porów)

$\boxed{ka}$ parametr (duży)

1° Jakie warunki brzegowe na powierzchni kulki?

A) prędkość jest ciągła

B) ciągłość tensora naprężeń

2° Przepływ Stokesa = 0 nieskończenie daleko od kulki

3° Jak skonstruować funkcję Greena dla r. DBB (ale czy nam do będzie potrzebne, skoro na zewnątrz jest Stokes, a DBB wewnątrz?)

1) Pytanie: jak skonstruować rozwiązanie DBB wewnątrz kulki?

2) Jak skonstruować również przepływ wokół kulki (na zewnątrz)?

3) Jaki będzie ruch kulki?

Poprzednio:

Oseen — współczynnik $= \frac{a^2}{6}$ dla sztywnej kuli

$$\bar{v} = T \cdot F + \boxed{}\, \nabla^2 T \cdot F$$

$\bar{v}$ – pole na zewnątrz kulki

Czy teraz będzie analogicznie? tylko inny współczynnik [ ], zależny od K?

Wracając do f-cji Greena dla DBB – przykład.

$$\nabla^2 \phi - \alpha^2 \phi = 0, \quad \phi = ? \qquad (*)$$

$$\phi = e^{-\alpha r} \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dr^2} - \alpha^2 \phi = 0.$$

$$\alpha^2 \phi - \alpha^2 \phi = 0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\alpha r}(-\alpha)\frac{x}{r}\right) = e^{-\alpha r}\left[\alpha^2 \frac{x^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha x^2}{r^3}\right]$$

$\nabla^2 \phi = e^{-\alpha r}\left[\alpha^2 - 3\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{r}\right] \neq \alpha^2 e^{-\alpha r}$, czyli $(*)$ nie jest spełnione opór $\Rightarrow$ zanik exp z odległością

$\psi = \frac{e^{-\alpha r}}{r^n}$ oraz $n=1 \Rightarrow \nabla^2 \psi - \alpha^2 \psi = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{e^{-\alpha r} n x}{r^{n+2}} - \alpha \frac{e^{-\alpha r} x}{r^{n+1}}\right) =$$

$$= e^{-\alpha r}\left(-\frac{n}{r^{n+2}} + \frac{\alpha n x^2}{r^{n+3}} + \frac{x^2 (n+2) n}{r^{n+4}} - \alpha \frac{1}{r^{n+1}} + \alpha^2 \frac{x^2}{r^{n+2}} + \frac{(n+1)\alpha x^2}{r^{n+3}}\right)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{e^{-\alpha r}}{r^{n+2}}\left[\alpha^2 r^2 + \alpha r\left(n - 3 + (n+1)\right) + (n+2)n - 3n\right] = \alpha^2 \psi +$$

$$+ \frac{e^{-\alpha r}}{r^{n+2}}\left(2(n-1)\alpha r + n(n-1)\right) = \alpha^2 \psi \text{ o ile } n = 1$$

Spotykamy się za 2 tygodnie

23 marca

Będzie:

1) ruch cząstki porowatej (prędkość opadania) w przybliżeniu Stokesa
2) ruch cząstki w ośrodku porowatym (funkcja Greena)

1) - 2) to 2 różne problemy fizyczne