Wykład 5.

13.04.

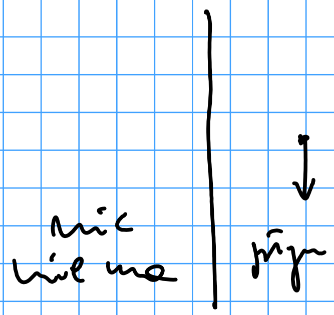
Wybrany pole prędkości cząstki punktowej w pobliżu ściany

- liniowe prędkości?
- jak duże jest wartości prędkości w każdym punkcie?
- izobary (jak duże jest ciśnienie) lub mapa kolorów?
- porównanie z nieograniczoną przestrzenią i cząstką przy powierzchni swobodnej
- perspektywa: co się dzieje w innych geometriach, np. cylinder, sfera, cząstka w pobliżu powierzchni płaskiej rozdziału płynów o różnych lepkościach (różne funkcje Greena dla układów ograniczonych) + ew. ruch cząstek sferycznych

(plan na dalsze zajęcia)

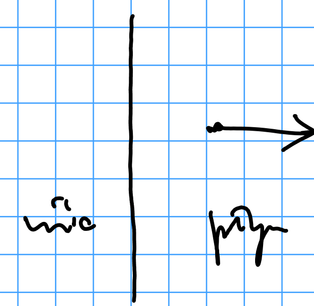
Przypomnienie

Funkcja Greena dla siły punktowej w pobliżu ściany sztywnej płaskiej

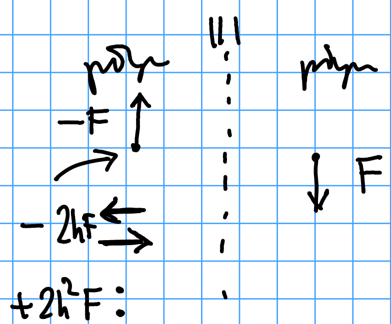


$\bar{v}(\bar{r}) = ?$

$p(\bar{r}) = ?$



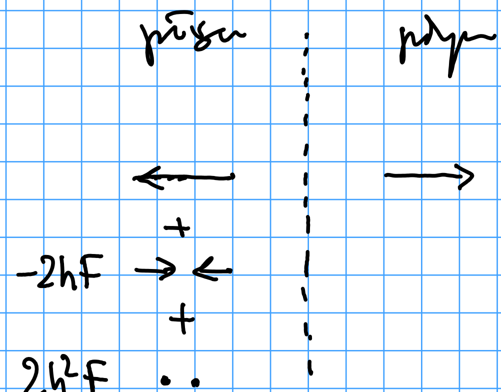
Metoda obrazów : Blake



$-F$ Stokeslet

$+2hF$ Stokes-doublet

$-2h^2F$ source-doublet



$+F$ Stokeslet

$-2hF$ Stokes doublet

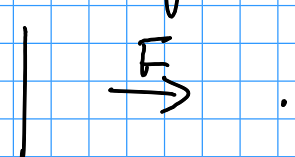
$+2h^2F$ source-doublet

Rozwinięcie : podane poprzednio

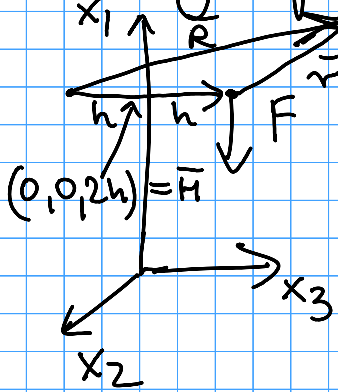
$|r| \to \infty$ to jakie są wiodące człony

$\sim 1/r^k$ $k = ?$

dla prędkości i ciśnienia?



1° Asymptotyka dla dużych $r \to \infty$



$$\underline{4\pi p = \frac{\bar{r}\cdot\bar{F}}{r^3} - \frac{\bar{R}\cdot\bar{F}}{R^3} - 2h\frac{\partial}{\partial R_1}\frac{\bar{R}\cdot\bar{F}_{SD}}{R^3}}$$

$\bar{r}$ – położenie punktu obserwacji względem położenia siły punktowej

$\bar{R}$ – położenie punktu obserwacji względem położenia obrazu

$$\boxed{p = \frac{F_k}{4\pi}\left[\frac{r_k}{r^3} - \frac{R_k}{R^3} - 2h\left(\delta_{k\alpha}\delta_{\alpha l} - \delta_{k3}\delta_{3l}\right)\frac{\partial}{\partial R_l}\left(\frac{R_3}{R^3}\right)\right]}$$

$\alpha = 1,2$ $\parallel$ do powierzchni

3 $\perp$ do powierzchni.

$F \parallel r_1$

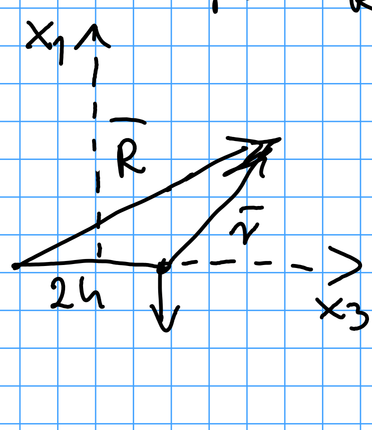
$$F_k = \begin{cases} F & k=1 \\ 0 & k=2,3 \end{cases}$$

$$F_k\delta_{k\alpha}\delta_{\alpha l}\frac{\partial}{\partial R_l}\left(\frac{R_3}{R^3}\right) = F\frac{\partial}{\partial X_1}\frac{R_3}{R^3}$$

R_3, bo Stokes-doublet ma siłę $F_{SD} \perp$ pow. czyli $\bar{F}_{SD} = (0,0,F)$

$$\frac{4\pi}{F}p = \frac{r_1}{r^3} - \frac{R_1}{R^3} - 2h\frac{\partial}{\partial R_1}\frac{R_3}{R^3} =$$

$$= \frac{r_1}{r^3} - \frac{R_1}{R^3} - 2h\frac{(-3)R_1R_3}{R^5} = \underbrace{\frac{r_1}{r^3} - \frac{R_1}{R^3}}_{\sim 1/r^2} + \underbrace{\frac{6hR_1R_3}{R^5}}_{\sim 1/r^3}$$



$R_1 = r_1$ $\qquad \frac{h}{r} \to 0$

$R_3 = r_3 + 2h$

$R_2 = r_2$ $\qquad r/h \to \infty$

$$R=\sqrt{r_1^2+r_2^2+(r_3+2h)^2} \qquad r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2}$$

$$R=r\sqrt{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2+\left(\frac{r_3}{r}+2\frac{h}{r}\right)^2}$$

$\frac{r_1}{r},\ \frac{r_2}{r_1},\ \frac{r_3}{r}$ czynniki

$$R/r\approx\sqrt{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2+\left(\frac{r_3}{r}\right)^2+2\frac{h}{r}\frac{r_3}{r}+\ldots}\approx 1+\frac{h r_3}{2r^2}$$

– kątowe, stałe.

Ustalamy kąty, ale uciekamy z $r\to\infty$

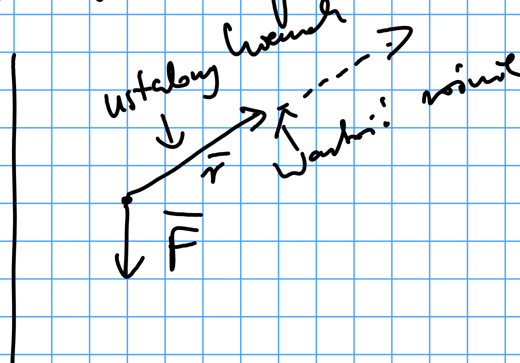
$$\frac{r_1}{r^3}-\frac{R_1}{R^3}=r_1\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)=\frac{r_1}{r^3}\left(1-\frac{r^3}{R^3}\right)\approx-\frac{3h}{2}\frac{r_1r_3}{r^5}$$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^3\approx 1-\frac{3}{2}h\frac{r_3}{r^2}$$

$$\frac{r_1}{r^3}-\frac{R_1}{R^3}\sim\frac{1}{r^3}$$ o ile $r_1\neq 0$, $r_3\neq 0$

Dla ustalonego kierunku $\bar{r}$, $r\to\infty$

Wniosek: pole ciężkości maleje wg z r jak $1/r^3$ lub szybciej



Prędkość pływu pod wpływem siły punktowej przy ściance:

pytanie: czy możemy układ przy $r\to\infty$ $1/r$?

$$8\pi\eta\,\bar u(\bar r) = \frac{1}{r}\left(\bar{\bar I} + \frac{\bar r\bar r}{r^2}\right)\bar F - \frac{1}{R}\left(\bar{\bar I} + \frac{\bar R\bar R}{R^2}\right)\cdot\bar F \quad + \text{h.o.t.}$$

Zał.: $\bar F = (F, 0, 0)$ równoległe do ściany

$$\bar F\cdot\bar r = r_1 F \qquad \bar F\cdot\bar R = R_1 F$$

$$\frac{8\pi\eta\,\bar u}{F} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\frac{\bar F}{F} + \left(\frac{r_1\bar r}{r^3} - \frac{R_1\bar R}{R^3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} - \frac{1}{R} - r_1^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \\ r_1 r_2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \\ r_1\left(\frac{r_3}{r^3} - \frac{r_3+2h}{R^3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \approx \frac{1}{r}\left(1 - \left(1 - \frac{h r_3}{2r^2}\right)\right) \approx \frac{h r_3}{2r^3} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r^2}$$

$$\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \approx \frac{3h r_3}{2r^5} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r^4}$$

$$r_1^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r^2}$$

Nie ma członów $1/r$!

Wniosek: u zachowuje się jak $1/r^2$ lub szybciej gdy $r\to\infty$

Co z członami $1/r^2$ w przykładzie? wkład od "Stokes-doublet"?

Ale w ciekawszym przypadku $F \perp$ powierzchni

$$\bar F = (0, 0, F)$$

$$8\pi\eta\,\bar u = \underbrace{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}_{\sim 1/r^2}\bar F + \underbrace{\left(\frac{\bar r\, r_3}{r^3} - \frac{\bar R\, R_3}{R^3}\right)}_{\sim 1/r^2} F$$