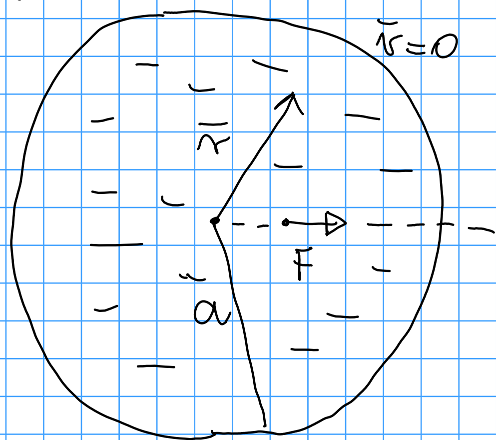
Wykład 7. 27.04.2010

Metoda obrazów dla cz. punktowej wewnątrz płynu wewnątrz kulistego pojemnika



„złota rybka w akwarium”

$\bar v(\bar r) = ?$

S. Kim, C. Maul, Phys. Fluids 6 (1994) 2221

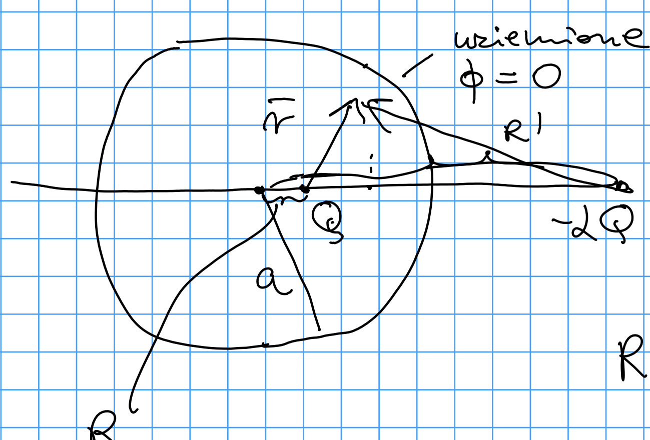
C.W. Oseen, Hydrodynamik, Leipzig, 1927, pp. 97-107

Uwagi:

1° $\bar v = 0$ jest kiedyś spełnione (dla pola na zewnątrz sfery, i kiedy w środku sfery znajdował się Stokeslet oraz multipol odpowiadający dipolowi elektrostatycznemu)

2° Poszukajmy analogii z elektrostatyką

2°



$\phi(\bar r) = ?$

Metoda obrazów

$R \cdot R' = a^2$

Na powierzchni: $\phi(\bar r) = 0$, $\phi(\bar r) = \phi_1 + \phi_2$

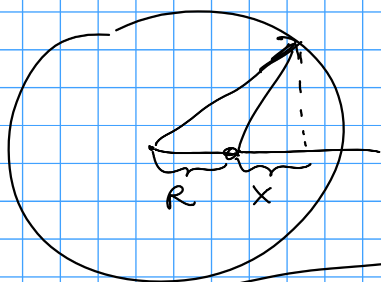
$$\left[\frac{Q}{r} + \frac{\alpha Q}{r'}\right]_{\text{na sferze}} = 0$$

$\bar{r} = (x, y, z)$

$\bar{r}' = (x', y, z)$

$(x+R)^2 + y^2 + z^2 = a^2$

analogicznie dla x'

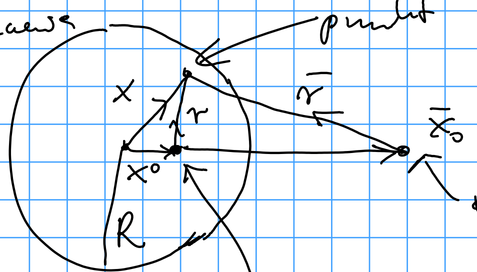


Wychodzi

$$\boxed{R' = \frac{a^2}{R} \qquad \alpha = \frac{a}{R}}$$

Rozwiązanie Kim et al.

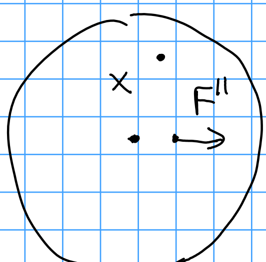
1° Oznaczenia



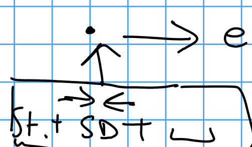
$|x_0| = R_0$

$R = 1$ $\quad R_0/R$.

2° Siła jest wzdłuż osi symetrii



$F^{\parallel}$ osi symetrii



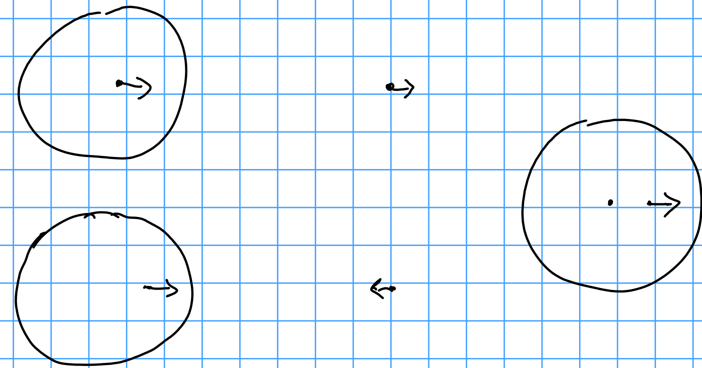
$e = \frac{x_0}{R_0}$

$r = x - x_0$ wektorowo

$$\underset{\text{wektorowo}}{v(x)} = \underbrace{w_1 T(x - \bar{x}_0) \cdot F^{\parallel}}_{\text{obraz}} + \underbrace{w_2 (e \cdot \nabla) \underbrace{T(x - \bar{x}_0) \cdot F^{\parallel}}_{\text{obraz}}}_{\text{Stokes doublet}}$$

$$+\underbrace{w_3 \nabla^2 T(x-\bar{x}_0)\cdot F^{\parallel}}_{\text{obraz}} + \underbrace{T(x-x_0)\cdot F^{\parallel}}_{\text{rzeczywista siła}}$$

$$w_1 = \frac{1-3R_0^2}{2R_0^3}$$



nie ma wkładu od Stokesleta

$$w_2 = -\frac{1-R_0^2}{R_0^4} < 0$$

$$w_3 = -\frac{(1-R_0^2)^2}{4R_0^5} < 0$$

Dla $F^{\perp}$ jest więcej wyrazów (obraz zawiera więcej multipoli)

Ogólnie: $8\pi\eta u_j = (G_{jm}+T_{jm})F_m$, gdzie

$$G_{jm} = e_m e_k \left\{ \frac{1-3R_0^2}{2R_0^3} T_{jk}(x-\bar{x}_0) - \frac{1-R_0^2}{R_0^4} e_l \nabla_l T_{jk}(x-\bar{x}_0) - \frac{(1-R_0^2)^2}{4R_0^5}\nabla^2 T_{jk}(x-\bar{x}_0)\right\}$$

$$+(\delta_{km}-e_k e_m)\left\{\frac{3R_0^2-5}{2R_0^3} T_{jk}(x-\bar{x}_0) + \frac{(1-R_0^2)^2}{4R_0^5}\nabla^2 T_{jk}(x-\bar{x}_0)\right\} +$$

$$+\frac{1-R_0^2}{R_0^4} e_k (\delta_{lm}-e_l e_m)\nabla_l T_{jk}(x-\bar{x}_0) - \frac{3(R_0^2-1)}{R_0^3}\frac{(\delta_{jm}-e_j e_m)}{\bar{r}} +$$

$$+(R^2-1)(\delta_{km}-e_k e_m)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$$

gdzie $\varphi_k = -\frac{3(R_0^2-1)}{2R_0^3}\frac{x_k}{r}\frac{R-\bar{R}_0\cos\theta+\bar{r}\cos\theta}{R\bar{R}_0^2\sin^2\theta}$