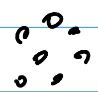
Wykład 3

23.03.2010

(η_2) Krople $\quad U = ?$

η_1 $\quad \downarrow F \quad v(\bar{r})$ zewnątrz

nie zewnątrz



krople zawiesiny

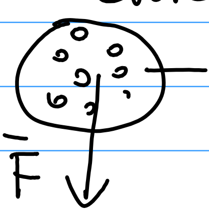
$\downarrow F$

?

Co ogólnie jak opływy mówić ośrodek porowaty?

$v\big|_{\infty} = 0$

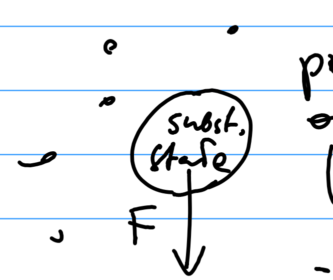
1° Stokes



$\bar{F}$

$U = ?$

2°



porowaty ośrodek (Brinkman)

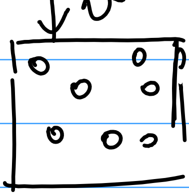
F

$U = ?$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\bar{v} = 0 \\ &\eta\left(\Delta\bar{v} - K^2 V\right) - \nabla p = 0 \end{aligned}\right\}$$

B

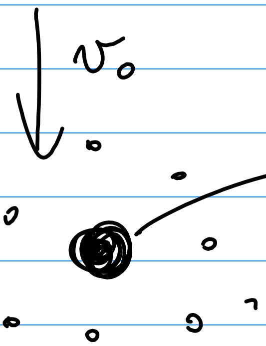
Brinkman + Debye-Büche



$\downarrow \bar{v}$

jesteśmy w układzie odwróconym, w którym szkielet porowatych cząstek spoczywa

$K = \frac{1}{\lambda}$ λ – długość Debye'a ekranowania oddziaływań hydrodynamicznych (wielkość porów)

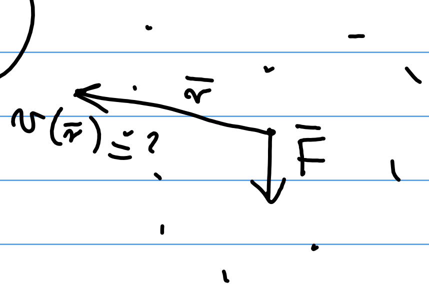


warunki przylepania płynu do cząstki (z substancji stałej)

$aK \gg 1$ np. $aK = 5$.

$\frac{a}{\lambda} \gg 1$

2°



Jakie jest rozw. fundamentalne r-nia DBB dla siły punktowej?

$$\eta(\Delta \bar v - k^2 \bar v) - \nabla p = -\bar F \delta^3(\bar r) \qquad \bar\nabla\cdot\bar v = 0$$

Przypomnienie: dla Stokesa

$$\eta \Delta \bar v - \nabla p = -\bar F \delta^3(\bar r) \qquad \bar\nabla\cdot\bar v = 0$$

$\hat r = \frac{\bar r}{r}$

$$\bar v_{FS} = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\bar{\bar I} + \hat r \hat r\right)\cdot \bar F$$

b. wolny zanik z odległością

Funkcja Greena dla r. DBB

Hipoteza

$\bar v$ = człony potęgowe $\sim \frac{1}{r^k}$ + człony $\sim e^{-Kr}$

$k > 1$

Jak rozwiązywać?

Przykład prostszy

$$\boxed{\nabla^2\phi - \alpha^2\phi = -\delta^3(\bar r)}$$

$$\phi = \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}$$ rozwiązanie Yukawy

Zadanie domowe — sprawdzić, że tak jest

$$\nabla^2(\bar F\phi) - \alpha^2(\bar F\phi) = -\bar F\delta^3(\bar r)$$

1° Zamiana zmiennych

$$\eta\left(\nabla^2\bar v - k^2\bar v\right) - \nabla p = -\bar F\cdot\delta^3(\bar r) \quad / k^3$$

$$0 = \bar\nabla\cdot\bar v = \partial/\partial\bar r\cdot\bar v = \bar\nabla_x\cdot\bar w\, k^2 = 0$$

$$\bar w = \frac{\bar v}{k} \qquad \pi = \frac{p}{k^2},\ \frac{\partial}{\partial k\bar r}\frac{p}{k^2} \quad \Big\}\ \bar x = k\bar r \qquad \delta^3(\bar x) = \frac{\delta^3(\bar r)}{k^3}$$

$$\boxed{\eta\left(\nabla_x^2\bar w - \bar w\right) - \bar\nabla_x\pi = -\bar F\delta^3(\bar x)} \qquad \bar\nabla_x\cdot\bar w = 0$$

$\bar w$ = suma kilku członów

2° Ciśnienie

$$-\nabla_x^2\pi = -\bar F\cdot\bar\nabla_x\delta^3(\bar x)$$

$$\boxed{\pi = \frac{\bar F\cdot\bar x}{4\pi x^3}}$$

Ciśnienie jest takie samo jak dla Stokesa

3° Prędkość — wkład człony dipolowe

$$\eta\bar w_d = -\bar\nabla_x\pi$$

$$\bar w = \bar w_d + \bar w_r \qquad \underline{\nabla_x\cdot\bar w_r} = -\bar\nabla_x\cdot\bar w_d = +\frac{\nabla_x^2\pi}{\eta} = \frac{\bar F\cdot\bar\nabla_x\delta^3(\bar x)}{\eta}$$

$$\eta\left(\nabla_x^2\bar w_r + \underbrace{\nabla_x^2\bar w_d}_{-\bar\nabla_x\nabla_x^2\pi/\eta = -\bar\nabla_x(\bar F\cdot\bar\nabla_x)\delta^3(\bar x)/\eta} - \bar w_r\right) = -\bar F\delta^3(\bar x)$$

$$\underline{\eta\left(\nabla_x^2\bar w_r - \bar w_r\right) = -\bar F\delta^3(\bar x) + \bar\nabla_x(\bar F\cdot\bar\nabla_x)\delta^3(\bar x)}$$

4° Yukawa

$$\eta \bar{w}_y = \frac{\bar{F}}{4\pi x} e^{-x} \qquad \bar{w}_y = \frac{\bar{F} e^{-x}}{4\pi \eta x}$$

$$\bar{w}_r = \bar{w}_y + \bar{w}_p \qquad \eta\left(\nabla_x^2 \bar{w}_y - \bar{w}_y\right) = -\bar{F}\delta^3(\bar{x})$$

$$\eta\left(\nabla_x^2 \bar{w}_p - \bar{w}_p\right) = \bar{\nabla}_x\left(\bar{F}\cdot\bar{\nabla}_x\right)\delta^3(x) = -\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x \cdot \left(-\bar{F}\delta^3(x)\right)$$

$$\bar{w}_p \overset{?}{=} -\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x \cdot \bar{w}_y$$

Ale czy dobry wybór spełnia r. nieściśliwości? Sprawdzamy:

$$\eta \bar{\nabla}_x \cdot \bar{w}_r = \bar{F}\cdot\bar{\nabla}_x \delta^3(\bar{x})$$

$$\eta \bar{\nabla}_x \cdot \left(\bar{w}_p + \bar{w}_y\right) =$$

$$= \eta \bar{\nabla}_x \cdot \left(-\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x \cdot w_y + \bar{w}_y\right) = -\eta\left(\nabla_x^2 \bar{\nabla}_x \cdot \bar{w}_y - \bar{\nabla}_x \cdot w_y\right) =$$

$$= -\bar{\nabla}_x \cdot \underbrace{\eta\left(\nabla_x^2 \bar{w}_y - \bar{w}_y\right)} = -\bar{\nabla}_x \cdot \left(-\bar{F}\delta^3(x)\right) = \bar{F}\cdot\bar{\nabla}_x \delta^3(x)$$

OK.

$$\bar{w} = \bar{w}_d + \bar{w}_y + \bar{w}_p \qquad \Pi = +\frac{\bar{F}\cdot\bar{x}}{4\pi x^3}$$

$$\bar{w} = -\frac{\nabla_x \Pi}{\eta} + \left(I - \nabla_x \nabla_x\right)\cdot\frac{\bar{F} e^{-x}}{4\pi\eta x} =$$

$$= \frac{\bar{F}\cdot}{4\pi\eta}\left[\underbrace{-\nabla_x \frac{\bar{x}}{x^3}}_{\text{człony potęgowe (dipolowe)}} + \underbrace{\left(I - \nabla_x \nabla_x\right)\frac{e^{-x}}{x}}_{\text{człony exp (tłumienie)}}\right]$$

$$\bar{v} = k\bar{w}$$

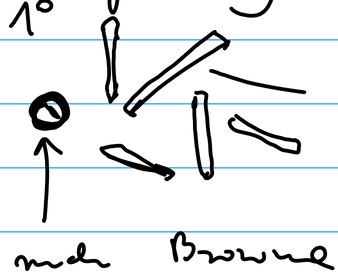
$$\boxed{p = k^2 \Pi = \frac{\bar{F}\cdot\hat{r}}{4\pi r^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar v &= \frac{\bar F}{4\pi\eta r}\left[I\, h_1(x) + \hat r \hat r\, h_2(x) \right] \\ h_1(x) &= -\frac{1}{x^2} + e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ h_2(x) &= \frac{3}{x^2} - e^{-x}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \end{aligned}}$$

F-cje Greena dla r. DBB (ośrodka porowatego)

Przykłady ośrodków porowatych

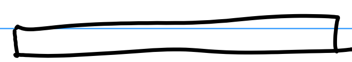
1°



wirusy fd. Juelich Jan Dhont

$L \sim 880\,nm$

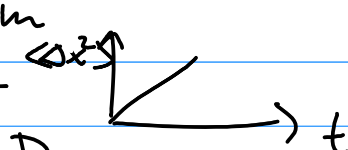
$D \sim 6{,}6\,nm$



wirus fd.

$a \sim 6{,}4\,nm$

$D = ?$ ~~~ $\langle \Delta x^2 \rangle \sim \underbrace{6D}\,t$



Z pomiarów dyfuzji własnej D czy można określić ile wynosi K dla ośrodka porowatego złożonego z wirusów

Problem: 1° ϕ – $\dfrac{\text{objętość prętów}}{\text{objętość prętów + płynu}}$

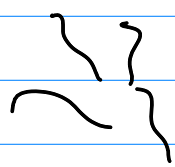
ϕ – małe przypadkowa orientacja

2° ϕ – wysokie – przejście do fazy

uporządkowanej $D_\perp$ $D_\parallel$
ośrodek nieizotropowy
wtedy DBB jest niedobre

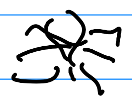
Nieizotropowe r. DBB, $K_\parallel$ i $K_\perp$
$K_\parallel = 0$,

2°

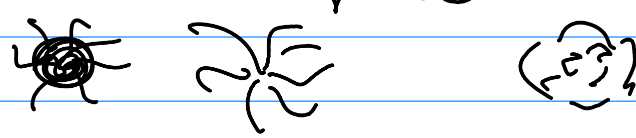


polimery, DNA
ośrodek porowaty,

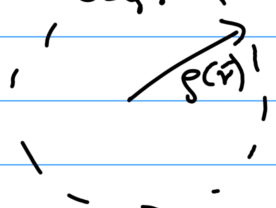
3°



cząstki z wypustkami
biologiczne micele



Cząstki porowate,



$\rho(\bar r)$ – gęstość segmentów
np. $\rho(\bar r) = \text{const}$.

ζ – opór 1 segmentu

$\zeta \rho(\bar r) = K^2(\bar r)$

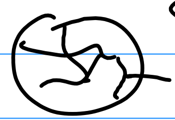
$$\boxed{\eta\left(\nabla^2 \bar v - \underbrace{K^2(\bar r)}\left(\bar v - \bar U(\bar r)\right)\right) - \nabla p = 0, \qquad \bar\nabla \cdot \bar v = 0.}$$

(*) ↑ uogólnione r-nie DBB

B. U. Felderhof Physica **80A** (1975) 63

(2.1)

1°

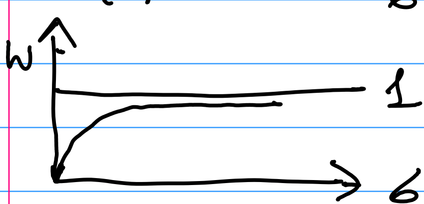


$\downarrow F$ $\quad \kappa$, $\kappa R = \sigma$

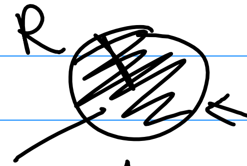
$$F = 6\pi\eta R \cdot w\, U$$

$$w = \frac{G_0(\sigma)}{1 + \frac{3}{2} G_0(\sigma)/\sigma^2}$$

$$G_0(\sigma) = 1 - \frac{\tanh \sigma}{\sigma}$$



2°



$\downarrow F$ $\quad \bar{v}(\bar{r})|_S = \bar{U}$

Stokes: $\left(\bar{v}_{fs} + \frac{a^2}{6}\nabla^2 \bar{v}_{fs}\right)$ pole nie zmienia

Brinkman: $\bar{v} = \underbrace{\left(\alpha\, \bar{v}_{FDBD} + \beta\, \nabla^2 v_{FDBD}\right)}_{\alpha,\beta \text{ – z w. brzegowego}}$

$$F = \int_S \sigma \cdot \bar{n}\, dS$$

$$F = 6\pi\eta R \cdot w\, U$$

$$\boxed{w = \left(1 + \kappa R + (\kappa R)^2/3\right)}$$

κ wspólne przepuszczalność wewnętrzna (wewnętrzne dziury)

$\kappa \to 0$ dziury coraz węższe Stokes

$w \to 1$.