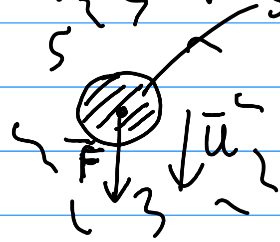
Wykład 4, 30.03.2010

(1) Co było?



substancja stała

Problem ruchliwości

$$\bar{U} = \bar{\bar{\mu}} \cdot \bar{F}$$

1 cząstki $\quad \bar{\bar{\mu}} \sim \bar{\bar{I}}$

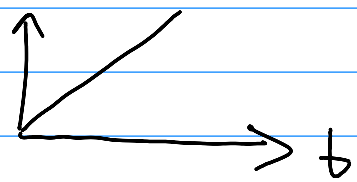
$$U = \mu^{tt} F$$

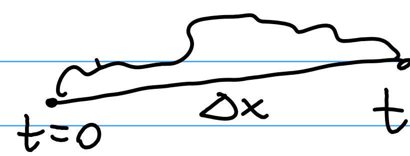
ośr. porowaty

dwie cząstki

mała cząstka, nawet jeśli $\bar{F} = 0$
cząstka porusza się pod wpływem ruchów Browna

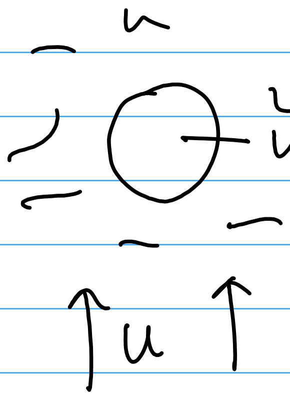
$$\langle \Delta x^2 \rangle \sim 6Dt$$





D - wsp. dyfuzji

$$D = kT \cdot \mu^{tt}$$



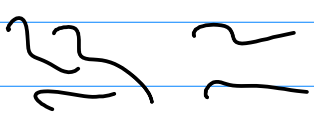
$u = \mathrm{const}$

$$F = ?$$

$$F = \frac{1}{\mu^{tt}} U$$

$$U < U_{st.}$$

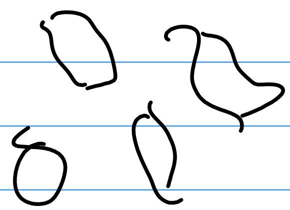
Przykłady ośr. porowatych



polimery np. DNA
nanowłókna
wirusy fd

wnętrze ośrodka porowatego

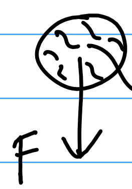
$$\eta(\nabla^2 \bar{v} - K^2 \bar{v}) - \nabla p = 0 \qquad \bar{\nabla}\cdot\bar{v} = 0,$$



K – odwrotność długości hydrodynamicznego oddziaływania

$1/K^2 = k$, przepuszczalność ośrodka porowatości ośrodka

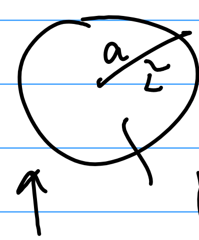
2° – pojęcie Stokesa



oś. porowatego

$\bar{U} = ?$ $\qquad U = \mu^{tt} F$

$\mu^{tt} = ?$ $\qquad U > U_{st}$.



$a \gg L$

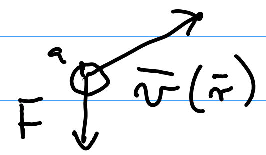
przepływ wewnątrz cząstki?

przepływ na zewnątrz?

Dziś:

Cel: znalezienie pola prędkości od ciałka (siły) punktowej w pobliżu sztywnej ściany

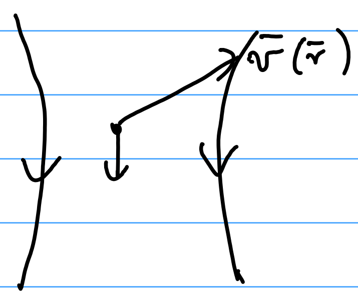
$$\bar v(\bar r)\Big|_{r\to\infty} \to 0,$$



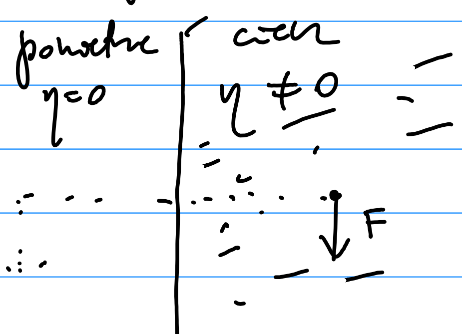
a - mały

w ∞ przestrzeni

$$\bar v(\bar r) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\bar{\bar I} + \hat r \hat r\right)\cdot \bar F \qquad \hat r = \frac{\bar r}{r}$$

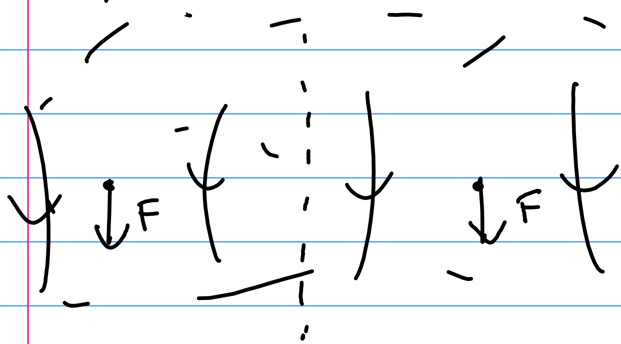


W pobliżu powierzchni swobodnej

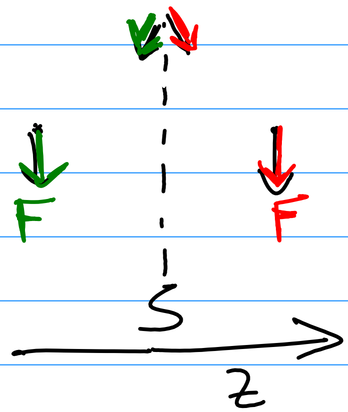


w. brzegowe: $\bar t \cdot \bar{\bar\sigma} \cdot \bar n = 0$ $\quad v_\perp = 0 \quad v_\parallel \neq 0$

Metoda obrazów



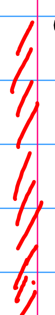
$v_\parallel$ jest $\neq 0$ 2x mocniejsze niż byłoby dla 1 siły



$$v_\perp \Big|_S = 0 ,$$

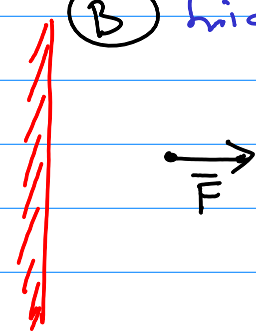
$$\bar{t} \cdot \underbrace{\sigma \cdot \bar{n}}_{\underbrace{\partial_\perp v_\parallel}_{=0} + \underbrace{\partial_\parallel v_\perp}_{0}}$$

bo $v_\parallel$ jest symetryczną funkcją z



(A) siła $\parallel$ powierzchni

$\downarrow \bar{F}$ $\quad \bar{v}(\bar{r}) = ?$



(B) siła $\perp$ powierzchni

← w. brzegowe $v_\parallel \big|_S = 0$ $\quad v_\perp \big|_S = 0$

Metoda obrazów

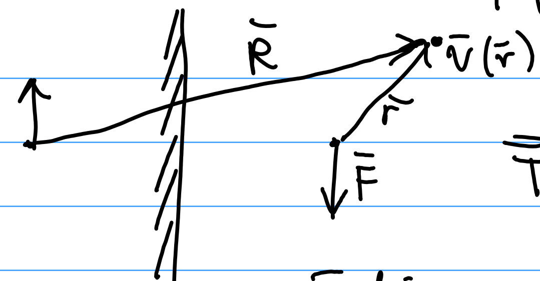
$$\eta \nabla^2 \bar{v} - \nabla p = -\bar{F}\, \delta^3(\bar{r}) \qquad \nabla \cdot \bar{v} = 0$$

$$\bar{v} \Big|_S = 0$$

rozwiązanie J.R. Blake 1971
Proc. Camb. Phil. Soc. 70 303

$$\overline{\overline{T}}(\bar r) = \left(\overline{\overline{I}} + \frac{\bar r \bar r}{r^2}\right)\frac{1}{8\pi\eta r}$$

$$\bar P(\bar r) = \frac{\bar r}{4\pi r^3}$$



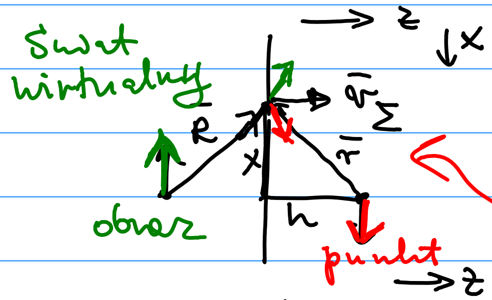
$$\overline{\overline{T}}(\bar r)\cdot \bar F$$

Krok pierwszy - osłabienie pole na ścianie $(U_{\parallel}=0)$

$$\bar U = \overline{\overline{T}}(\bar r)\cdot\bar F - \overline{\overline{T}}(\bar R)\cdot\bar F + \bar U_{SD} + \bar U_S \quad ; \quad \bar U_{SD}, \bar U_S = ?$$

$$p = \bar P(\bar r)\cdot\bar F - \bar P(\bar R)\cdot\bar F + p_{SD} + p_S \quad ; \quad p_{SD}, p_S = ?$$

Na ściance: nie ma prędkości równoległej do ściany a składowe prostopadłe jest dwa razy większe niż w oop.



tu jest nasz świat

Co zostaje na ściance? $\bar r|_S = (x, y, -h)$

$\bar R|_S = (x, y, h)$

$$8\pi\eta\, U_\perp\Big|_S = -2\frac{hx}{r^3}F$$

h - stałe $\ll$ wszędzie na S

Krok drugi

Asymptotyka na ściance w ∞ i skompensowanie tej asymptotyki

$$x \to \infty, \quad r \to \infty \qquad U_\perp \sim \frac{1}{r^2} \sim \frac{1}{R^2}$$

Analogia: dipol elektryczny

$\dot +$ $\dot -$ pole od dipola zawsze szybciej

Pomysł nr 1: dołożyć obrazowo dodatkowy multipol:

$v \sim \frac{1}{R^2}$ $\qquad -F \downarrow \uparrow F$ $\qquad F\cdot d$ „moment dubletowy" $\to p \neq 0$

$\tilde d$ „Stokes doublet"

Pomysł nr 2 (KW)

$$p=0 \iff \bar v = \nabla\left(\frac{\bar F\cdot \bar R}{R^3}\right) \qquad v\sim\frac{1}{R^2}$$

Teraz realizacja kroku nr 2

→ ← to pole prędkości mamy skompensować dubletem Stokesletów + ...

$+ \leftrightarrow$

$d \parallel \hat x$

$\downarrow \bar F = F\hat x$

$\downarrow x \qquad \bar{\bar T}(\bar R)\cdot \bar F$

$$\lim_{d\to 0} \bar{\bar T}\left(\bar R+\frac{\bar d}{2}\right)\cdot\bar F - \bar{\bar T}\left(\bar R+\frac{\bar d}{2}\right)\cdot \bar F$$

$$= \bar{\bar T}(\bar R)\cdot\bar F - \bar{\bar T}(\bar R)\cdot \bar F + d\left.\frac{\partial \bar{\bar T}}{\partial X}\right|_{\bar R}\cdot\bar F$$

$$\frac{\partial \bar{\bar T}(\bar R)}{\partial X}\cdot \bar F d$$

$F\cdot d = ?$

Jakie musi być d, żeby (albo $F\cdot d$) skompensować pole $\sim\infty$?

Daleko chcemy żeby mieć stokes-doublet

$$8\pi\eta\, U_1\Big|_{+S\uparrow,\ R\to\infty} \sim \frac{2hX}{R^3}F$$

A ile mamy?

Pole prędkości wygenerowane przez $\bar F\cdot d$ wynosi:

$\bar F = F\hat z$

$$8\pi\eta \bar u_{SD} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\bar{\bar I}}{R} + \frac{\bar R \bar R}{R^3}\right)\cdot \bar F d$$

$$= \hat z F d\left(-\frac{X}{R^3}\right) + F d h \frac{\partial}{\partial X}\frac{\bar R}{R^3} =$$

x, y, z $$= \hat z F d\left(-\frac{X}{R^3}\right) + F d h \frac{\hat x}{R^3} - 3 F d h \frac{\bar R X}{R^5}$$

$$8\pi\eta u_{SD\,j} = -\delta_{j3} F \frac{X}{R^3} +$$

$$8\pi\eta \bar u_{SD}\Big|_S = ?$$

$X\to\infty \qquad 8\pi\eta\bar u_{SD} \sim \frac{1}{R^2}$

Dominuje 1-szy człon

czyli za jego pomocą chcemy skasować

$\frac{2hX}{R^3}F$, czyli

$$\frac{2hX}{R^3}F = -\frac{dX}{R^3}F \qquad Fd = \boxed{-2hF}$$

„moment dubletowy"

Wniosek: odtworzyliśmy asymptotykę dla $X\to\infty$

Co zostaje?

$$8\pi\eta \bar u_{SD} = -2h \frac{\partial T(\bar R)}{\partial X}\cdot \bar F$$

Co zostało na ściance do skasowania?

$$-2h^2 F \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\bar R}{R^3}\right)$$

Jak to zrobić?

$$8\pi\eta\, \bar{u}_S = 2h^2 F \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{R}}{R^3}\right)$$

1°

$$8\pi\eta\, \bar{u} = \frac{1}{r}\left(\bar{\bar{I}} + \frac{\bar{r}\bar{r}}{r^2}\right)\cdot\bar{F} - \frac{1}{R}\left(\bar{\bar{I}} + \frac{\bar{R}\bar{R}}{R^2}\right)\cdot\bar{F} - 2h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{\bar{I}}}{R} + \frac{\bar{R}\bar{R}}{R^3}\right)\cdot\bar{F} + 2h^2 F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{R}}{R^3}\right)$$

ale uwaga: $\bar{F} \parallel X$

Stokeslet $-F$ + stokes doublet $2hF$ + source doublet $-2h^2F$

Ciśnienie

$$4\pi p = \frac{\bar{r}\cdot\bar{F}}{r^3} - \frac{\bar{R}\cdot\bar{F}}{R^3} - 2h\frac{\partial}{\partial x}\frac{\bar{R}\cdot\bar{F}}{R^3}$$

Sprawdzamy, czy $\bar{u}_S$ spełnia r. Stokesa i z jakim ∇p?

$$\frac{\bar{R}\cdot\bar{F}}{4\pi R^3} = p_{Oseen} \Rightarrow \nabla^2 p_{Oseen} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \bar{u}_S = 0$$

$$\Downarrow$$

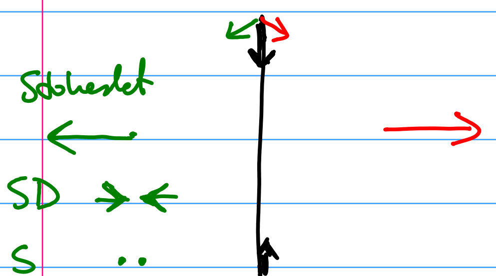
$$\nabla p_S = 0 \qquad p_S = \text{const}$$

Jeszcze sprawdźmy, czy $\nabla\cdot\bar{u}_S = 0$?

$$\nabla\cdot\frac{\bar{R}}{R^3} = \frac{3}{R^3} - \frac{3\,\bar{R}\cdot\bar{R}}{R^5} = 0$$

w naszym świecie

B, Siła prostopadła do powierzchni



Na S nie ma składowej $\perp$ do powierzchni, rozkład u_y

Pełne rozwiązanie ($\bar{F}$ - dowolnie zorientowane).

Oznaczenie: $\alpha = 1,2$ ~~tylko~~ kierunki $\parallel$ do powierzchni czyli x, y; 3 - kierunek $\perp$ powierzchni, czyli z
$j = 1,2,3$

Zmienia się znak i kierunek momentów „dubletowego" i „źródłowego"

$$u_j = \frac{F_k}{8\pi\eta}\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\delta_{jk} + \frac{r_j r_k}{r^3} - \frac{R_j R_k}{R^3} + 2h\left(\delta_{k\alpha}\delta_{\alpha l} - \delta_{k3}\delta_{3l}\right)\frac{\partial}{\partial R_l}\left(\frac{h R_j}{R^3} - \left(\frac{\delta_{j3}}{R} + \frac{R_j R_3}{R^3}\right)\right)\right]$$

$$p = \frac{F_k}{4\pi}\left[\frac{r_k}{r^3} - \frac{R_k}{R^3} - 2h\left(\delta_{k\alpha}\delta_{\alpha l} - \delta_{k3}\delta_{3l}\right)\frac{\partial}{\partial R_l}\left(\frac{R_3}{R^3}\right)\right]$$

Wesołych Świąt!