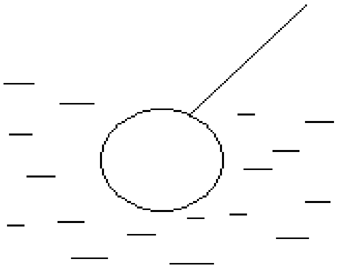
HYDRODYNAMIKA MIKROŚWIATA

WYKŁAD 9

19.01.2010

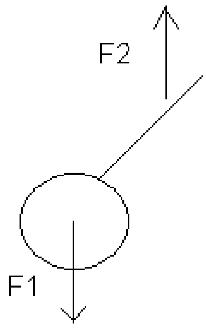
1. Filmy Taylora- opadanie pręta + pływanie
2. Sformułowanie problemu **pływania**



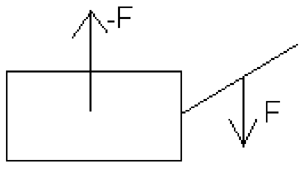
Gęstość pływaka= gęstość płynu

lepki płyn

Nie ma sił zewnętrznych, nie ma momentów sił zewnętrznych działających na całego pływaka.



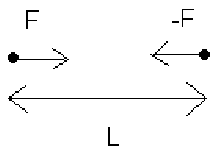
Efekt motorka jest taki, że działają siły lub momenty sił na fragmenty pływaka



$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 0$$

Zadanie domowe:

A)



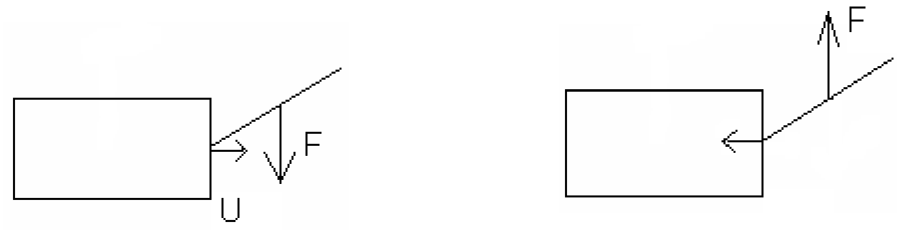
t = 0

t = T   gdzie T- długość cyklu

Czy można tak dobrać F(t) aby w ciągu jednego cyklu każda z tych cząstek przemieściła się w prawo lub lewo?

B) To samo pytanie dla 3 cząstek na linii prostej

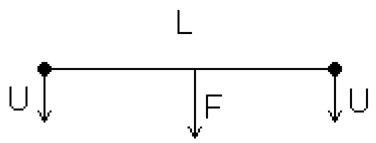
Uwaga końcowa: dojdziemy do rozwiązań fundamentalnych (dla siły punktowej) w pobliżu sztywnej ścianki



Odwrócenie w czasie: $F \rightarrow -F$
$U \rightarrow -U$

Ale cykl zawiera kawałki, które są wzajemnie odwrócone w czasie (ruch w przód i tył tak samo)

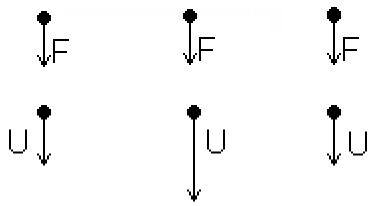
Dygresja:



$$F = \int_0^L f(L)dL$$

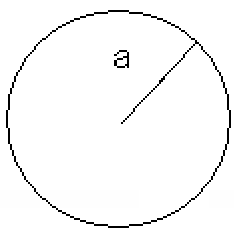
$$f(L) = ?$$

Dzielimy ten pręt na małe elementy (f(L)=const. Bo między elementami jest siła więzów)



Jakie prędkości??

Krople (sferyczne)

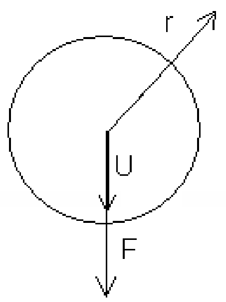


Parametry kropli: ρ^w, η^w
Parametry płynu na zewnątrz: ρ^z, η^z

Gdzie: $\rho^w \neq \rho^z$

Na kroplę działa siła grawitacji i siła wyporu:

$$F = \frac{3}{4} g \pi a^3 (\rho^w - \rho^z)$$



U=?

V(r)=?

V^w=? prędkość wewnątrz kropli

V^z=? prędkość na zawnątrz

Warunki brzegowe:

1) $[V^w - V^z]_{r=a} = 0$

2) $\bar{r}[\sigma^w - \sigma^z] \cdot \bar{t} = 0$ gdzie $\bar{t}$ - wektor styczny do powierzchni sfery

Składowa normalna może być nieciągła jeśli jest napięcie powierzchniowe

$$\sigma_{ij}^{\ w} = \eta^w (\partial_i \cdot V_j^{\ w} + \partial_j \cdot V_i^{\ w}) - p^w \cdot \delta_{ij}$$

<u>Rozwiązanie:</u>

Intuicja- wewnątrz kropli prędkość opadania w środku jest większa niż prędkość na zewnątrz.
Szukamy pola prędkości w chwili początkowej, gdy kropla jest sferyczna.
Następnie jeśli napięcie powierzchniowe jest duże to kropla pozostanie sferyczna, jeśli napięcie będzie małe to kropla będzie się deformować.

Wyprowadzenie (układ laboratoryjny):

Najpierw próbujemy zgadnąć V^w. Najprościej założyć ruch postępowy lub obrót bryły sztywnej.

$$\overline{V}^w = \overline{U}_0 + (\alpha_1 \cdot \overline{\overline{I}} \cdot r^2 + \alpha_2 \cdot \bar{r} \cdot \bar{r}) \cdot \overline{F}$$
$$\overline{U}_0 \parallel \overline{F}$$

$p^w = p_0 + \alpha_3 \cdot \overline{F} \cdot \bar{r}$ gdzie $p_0 = 0$

$$\nabla p^w = \alpha_3 \cdot \overline{F}$$

Szukane: $\overline{U}_0$, α_1, α_2, α_3

$\overline{\nabla} \cdot \overline{V}^w = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(\alpha_2)$

$\eta^w \cdot \nabla^2 \cdot \overline{V} - \nabla p^w = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3(\alpha_2)$

Zostanie $\overline{U}_0$ i α_2 a te wyznaczymy z warunków brzegowych

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{V}^w = 0$$

$$\overline{\nabla}(\alpha_1 r^2 \overline{F} + \alpha_2 \overline{r}(\overline{r}\cdot\overline{F})) = 0$$

$$\partial_i[..] = \alpha_1 \cdot 2r_i \cdot F_i + \alpha_2 \cdot \partial_i \cdot r_i \cdot (\overline{r}\cdot\overline{F}) + \alpha_2 \cdot r_i \cdot F_i = 0$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 = -2\alpha_2$$

$$\eta^w \cdot \nabla^2 \alpha_2 \cdot (\overline{r}\overline{F} - 2r^2)\overline{F} - \alpha_3 \overline{F} = 0$$
$$\nabla^2 = \partial_k \partial_k$$

Więc po podstawieniu:

$$\alpha_{٣} = -١٠\eta^w \alpha_{٢}$$

Czyli wewnątrz:

$$p = -10\eta^w \alpha_2 \overline{F}\cdot\overline{r}$$
$$\overline{V}^w = \overline{U}_0 + \alpha_2(\overline{r}\cdot\overline{r} - 2\cdot\overline{\overline{I}}\cdot r^2)\cdot\overline{F}$$

<u>Rozwiązanie na zewnątrz:</u>

Rozwiązanie dla sztywnej kulki:

$$C(1+\frac{a^2}{6}\cdot\nabla^2)\cdot\overline{\overline{T}}(\overline{r})\cdot\overline{F}$$

Dla kropli C<1

Propozycja: $\overline{V}^z = C(1+\frac{a^2}{6}\cdot\nabla^2)\cdot\overline{\overline{T}}(\overline{r})\cdot\overline{F} + E\cdot\overline{\overline{T}}(\overline{r})\cdot\overline{F}$

Warunki brzegowe:

$$[V^z - V^w]_{r=a} = 0$$

Na powierzchni: $\overline{V}^w = \overline{U}_0 + \alpha_2(\overline{r}\cdot\overline{r} - 2\cdot\overline{\overline{I}}\cdot r^2)\cdot\overline{F}$

$$(1+\frac{a^2}{6}\nabla^2)(\overline{\overline{T}}\cdot\overline{F})|_{na.pow.} = \frac{F}{6\pi\ \eta}$$

$$\overline{\overline{T}}\cdot\overline{F}\,|_{na.pow.} = \frac{F}{8\pi\ \eta^3}(\overline{r}\cdot\overline{r} + \overline{\overline{I}}\cdot a^2)$$

$$\overline{V}^w - \overline{V}^z = \overline{U}_0 + \alpha_2(\overline{r}\cdot\overline{r} - 2r^2\cdot\overline{\overline{I}})\cdot\overline{F} - \frac{\overline{F}\cdot C}{6\pi\ \eta} - \frac{\overline{F}\cdot E}{8\pi\ \eta}\cdot(\overline{\overline{I}}\cdot a^2 + \overline{r}\cdot\overline{r})$$

Ponieważ: $\overline{r}\cdot\overline{r} - 2r^2\cdot\overline{\overline{I}} = \overline{r}\cdot\overline{r} + \overline{\overline{I}}\cdot a^2 - 3\cdot\overline{\overline{I}}\cdot a^2$, to:

$$\overline{V}^{w} - \overline{V}^{z} = \overline{U}_0 + (\alpha_2 - \frac{E}{8\pi\ \eta})(\overline{\overline{I}} \cdot a^2 + \bar{r} \cdot \bar{r}) - 3a^2 \cdot \overline{F} \cdot \alpha_2 - \frac{\overline{F} \cdot C}{6\pi\ \eta}$$

Ponieważ: $\alpha_2 - \frac{E}{8\pi\ \eta} = 0$, to:

$$\overline{U}_0 - 3a^2 \cdot \overline{F} \cdot \alpha_2 - \frac{\overline{F} \cdot C}{6\pi\ \eta} = 0$$

Więc: $C = 6\pi\ \eta(\frac{U_0}{F} - 3a^2\alpha_2)$

Nadal do wyznaczenia: α_2, U_0

Warunki na tensor naprężeń:

1) $\bar{r}[\sigma^w - \sigma^z] \cdot \bar{t} = 0$

2) $\overline{F} = \int_S \bar{n} \cdot \bar{\sigma}^2 \cdot \bar{n} \cdot dS$

Chcemy policzyć: $r_k \cdot \sigma_{ki} = r_k \cdot \eta \cdot (\partial_k V_i + \partial_i V_k)$

$$V_i = \alpha_2 (r_i \cdot r_m - 2r^2 \delta_{im}) F_m$$

$$V_k = \alpha_2 (r_k \cdot r_m - 2r^2 \delta_{km}) F_m$$

$$r_k \cdot \sigma_{ki}{}^{w} = \alpha_2 \cdot \eta^w \cdot r_k (2\delta_{ik} \cdot r_m - r_i \cdot \delta_{mk} - 4\delta_{mi} \cdot r_k + r_k \cdot \delta_{mi} - 4r_i \cdot \delta_{km}) F_m$$

$$r_k \cdot \sigma_{ki}{}^{w} = \alpha_2 \cdot \eta^w \cdot [F_i(-3r^2) - r_i \cdot \overline{F} \cdot \bar{r}]$$

$$r_k \cdot \sigma_{ki}{}^{z} = r_k \cdot \eta^z \cdot (\partial_k V_i^z + \partial_i V_k^z) = \ldots$$

PODSUMOWANIE:

Krople opadają szybciej niż cząstka stała.

$U(\lambda)$ $\qquad$ $\lambda = \frac{\eta^w}{\eta^z}$

Jeśli:

$\lambda \to \infty$

to $U \to \frac{F}{6\pi\ \eta}$ jak ciało stałe

Jeśli:

$\lambda \to 0$

to $U \to \frac{F}{4\pi\ \eta}$ jak pęcherzyk